MATH-EDUCARE

NGUYỄN ĐỊNH (chủ biên)
NGUYỄN NGỌC HẢI

CÁC ĐỊNH LÍ VÀ BÀI TẬP
HÀM THỰC

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

Lời nói đầu

Học phần hàm thực là phần đầu của khối kiến thức về *giải tích hiện đại* được giảng dạy ở khoa toán các trường Đại học Sư phạm và Đại học Khoa học. Đây là học phần mang tính trừu tượng cao, do vậy, sinh viên thường lúng túng trong việc tiếp thu và giải bài tập. Chúng tôi viết quyển "Các định lí và bài tập hàm thực" này với mong muốn giúp cho sinh viên có thêm một tài liệu tham khảo trong quá trình học tập.

Quyển sách được chia làm bốn chương. Ngoài *chương 0* là phần ôn tập lại những kiến thức cần thiết, các *chương 1, 2, 3* là nội dung chính của sách, bao gồm: *không gian mêtric, lí thuyết độ đo và tích phân.*

Mỗi chương (trừ chương 0) đều được chia làm bốn phần. *Phần A* là tóm tắt lí thuyết. Ở đây, các định nghĩa, định lí được nhắc lại (phép chứng minh các định lí này có thể được tìm thấy trong các tài liệu tham khảo [ĐH], [Ha] hay [T]). Chúng tôi cũng đưa ra nhiều nhận xét, nêu lên các khía cạnh khác nhau của vấn đề hay các dạng khác nhau của những định nghĩa. Mục đích của phần này là giúp cho sinh viên (sau khi học ở lớp) có dịp củng cố lại lí thuyết bằng cách

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

suy nghĩ và chứng minh lại các nhận xét này như là các bài tập mở đầu. *Phần B* gồm các đề bài tập. Chúng tôi đã cố gắng sắp xếp các bài tập theo trình tự các tiết §1, §2, §3, ... và từ dễ đến khó. *Phần C* là bài tập ôn, thường gồm những bài tập có sử dụng các kiến thức tổng hợp trong nhiều tiết khác nhau. *Phần D* là lời giải hay hướng dẫn của các bài tập đã được nêu trong B và C.

Để sử dụng sách có hiệu quả, sinh viên nên tự giải các bài tập. Chỉ khi nào đã giải xong hay không thể giải được mới tham khảo phần hướng dẫn.

Quyển sách được chuẩn bị và hình thành bằng nhiều công sức nhưng rất khó tránh khỏi những thiếu sót. Các tác giả rất mong muốn nhận được những ý kiến xây dựng từ các đồng nghiệp và các bạn sinh viên.

Huế, tháng 12 năm 1999

Các tác giả

Ts. Nguyễn Định

Ths. Nguyễn Ngọc Hải

WWW.MATHEDUCARE.COM

Chương 0

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong phần này chúng ta nhắc lại một cách ngắn gọn các kiến thức cần thiết cho việc trình bày các chương sau.

§1. TẬP HỢP, ÁNH XẠ, QUAN HỆ.

1.1. Tập hợp.

1.1.1. Các phép toán trên các tập hợp.

a) Cho A, B là các tập hợp. Tập A được gọi là *tập con* của tập B, kí hiệu $A \subset B$, nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B. Hai tập hợp A, B được gọi là bằng nhau nếu $A \subset B$ và $B \subset A$.

Giả sử X là một tập hợp. Kí hiệu $\mathcal{P}(X)$ sẽ được dùng để chỉ tập hợp tất cả những tâp con của X.

Các phép toán hợp, giao, hiệu, hiệu đối xứng của hai tập được định nghĩa lần lượt như sau:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hay } x \in B\} \text{ (hợp của } A \text{ và } B),$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\} \text{ (giao của } A \text{ và } B),$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\} \text{ (hiệu của } A \text{ và } B),$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ (hiệu đối xứng).}$$

Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì ta cũng nói là A và B *rời nhau* (không giao nhau hay có giao bằng $\emptyset$).

Các tính chất. Mối quan hệ giữa các phép toán được thể hiện trong các công thức sau: giả sử A, B, C là các tập hợp, ta có:

(i) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

(ii) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,
(iii) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
(iv) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

b) **Hợp, giao của một họ tập:** Cho $(A_i)_{i \in I}$ là một họ các tập hợp. Hợp và giao của họ tập này được định nghĩa như sau:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \text{ sao cho } x \in A_i\}.$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ mọi } i \in I\}.$$

Họ $(A_i)_{i \in I}$ được gọi là rời nhau từng đôi nếu $A_i \cap A_j = \emptyset$ khi $i \neq j$.

Trường hợp $I = \mathbf{N}$, ta thường viết $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ hay $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ thay cho $\bigcap_{i \in \mathbf{N}} A_i$ và $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} A_i$. Các công thức sau là mở rộng của (i) và (ii) ở trên (B là một tập tùy ý):

$$B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B),$$

$$B \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B).$$

c) **Phần bù của một tập:** Giả sử X là một tập và $B, A \subset X$. Tập $X \setminus A$ gọi là *phần bù* của A trong X và được kí hiệu là A^c. Các đẳng thức sau là đúng.

(i) $A \setminus B = A \cap B^c$,
(ii) $A \subset B$ khi và chỉ khi $B^c \subset A^c$,
(iii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
(iv) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Luật De Morgan.

$(A_i)_{i\in I}$ là một họ những tập con của X. Các công thức sau thường được gọi là luật De Morgan:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c; \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

1.2. Ánh xạ.

1.2.1. Định nghĩa và các tính chất.

Giả sử A, B là các tập hợp khác rỗng. Một *ánh xạ* f từ A vào B, kí hiệu $f : A \longrightarrow B$ hay $x \mapsto f(x)$, là một quy tắc cho ứng mỗi phần tử $x \in A$ với một phần tử duy nhất $y \in B$. Phần tử y này thường được kí hiệu là $f(x)$ và gọi là giá trị của f tại x hay ảnh của x qua ánh xạ f.

Hai ánh xạ $f : A \longrightarrow B$, $g : A \longrightarrow B$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $f = g$, nếu $f(x) = g(x)$, với mọi $x \in A$.

Cho $f : X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ. Một đơn ánh, toàn ánh và song ánh được định nghĩa như sau:

$$(f\text{-đơn ánh }) \overset{\text{đn}}{\Longleftrightarrow} (\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2)$$
$$\Longleftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)),$$

$$(f\text{-toàn ánh}) \overset{\text{đn}}{\Longleftrightarrow} (\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y),$$

$$(f\text{- song ánh}) \overset{\text{đn}}{\Longleftrightarrow} (f \text{ vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh}).$$

Bây giờ giả sử $f : X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ, $A \subset X$ và $B \subset Y$. Ảnh của tập A qua ánh xạ f, kí hiệu $f(A)$, và nghịch ảnh (tạo ảnh) của tập B qua ánh xạ f, kí hiệu $f^{-1}(B)$, được định nghĩa là các tập sau:

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ để cho } f(x) = y\},$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Giả sử $f : X \longrightarrow Y$, $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$, $(B_i)_{i\in J} \subset \mathcal{P}(Y)$. Khi đó:

(i) $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$,

(ii) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$,

(iii) $f^{-1}(\bigcup_{i\in J} B_i) = \bigcup_{i\in J} f^{-1}(B_i)$,

(iv) $f^{-1}(\bigcap_{i\in J} B_i) = \bigcap_{i\in J} f^{-1}(B_i)$,

(v) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c = X \setminus f^{-1}(B)$.

1.2.2. Hợp của hai ánh xạ.

Cho $f : X \longrightarrow Y$ và $g : Y \longrightarrow Z$ là hai ánh xạ. Khi đó hợp của g và f (theo thứ tự đó), kí hiệu $g \circ f$, là ánh xạ được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)),\ x \in X. \end{aligned}$$

Ta có thể chứng minh được các đẳng thức sau đây:

(i) $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$, mọi $C \subset Z$,

(ii) $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$, mọi $h : T \longrightarrow X$,

(iii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$, mọi $B \subset Y$.
$A \subset f^{-1}(f(A))$, mọi $A \subset X$.

1.2.3. Tích Descartes của một họ tập.

Giả sử $(A_i)_{i\in I}$ là một họ các tập hợp. *Tích Descartes* của họ này, kí hiệu $\prod_{i\in I} A_i$, là tập được định nghĩa bởi

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i, \text{ mọi } i \in I\}.$$

Phần tử của $\prod_{i\in I} A_i$, thường được kí hiệu là $\{x_i : i \in I\}$ hay $(x_i)_{i\in I}$.

Khi họ này chỉ gồm có hai tập A, B thì tích Descartes của chúng sẽ được kí hiệu là $A \times B$ và phần tử của $A \times B$ thường được viết thành cặp (có thứ tự), nghĩa là

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Tương tự, tích Descartes của n tập, $A_1 \times .... \times A_n$ (cũng kí hiệu $\prod_{i=1}^{n} A_i$) là tập gồm các bộ có thứ tự $(a_1, a_2, ..., a_n)$ trong đó $a_i \in A_i$, mọi $i = 1.2, ..., n$.

Nếu có $i \in I$ mà $A_i = \emptyset$ thì ta định nghĩa $\prod_{i\in I} A_i = \emptyset$. Tuy nhiên nếu $A_i \neq \emptyset$ mọi $i \in I$ thì liệu ta có thể khẳng định là $\prod_{i\in I} A_i$ khác $\emptyset$ không ? Không thể trả lời câu hỏi này bằng cách chỉ sử dụng các tiên đề thông thường về tập hợp. Mệnh đề sau đây thường được biết dưới tên gọi là "Tiên đề chọn".

Tiên đề chọn: *Nếu $(A_i)_{i\in I}$ là một họ gồm các tập không rỗng thì $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.*

Dạng tương đương của tiên đề chọn: ..

Nếu $(A_i)_{i\in I}$ là một họ gồm các tập khác rỗng, rời nhau từng đôi một thì tồn tại một tập $E \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ sao cho $E \cap A_i$ chứa duy nhất một phần tử với mọi $i \in I$.

1.3. Quan hệ.

Một quan hệ (hai ngôi) trên tập X là một tập con $\mathcal{R}$ của tích Descartes $X \times X$.

Nếu $(x, y) \in \mathcal{R}$ thì ta nói "*x quan hệ với y theo quan hệ $\mathcal{R}$*" và kí hiệu $x\mathcal{R}y$.

MATH-EDUCARE

1.3.1. Quan hệ tương đương.

Một quan hệ $\mathcal{R}$ trên X được gọi là một *quan hệ tương đương* nếu nó thoả mãn các điều kiện sau:

(i) $x\mathcal{R}x$, với mọi $x \in X$ (tính phản xạ),
(ii) Nếu $x\mathcal{R}y$ thì $y\mathcal{R}x$ (tính đối xứng),
(iii) Nếu $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}z$ thì $x\mathcal{R}z$ (tính bắc cầu).

Giả sử $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên X và $x \in X$. *Lớp tương đương* của x (theo quan hệ tương $\mathcal{R}$), kí hiệu là $\overline{x}$, là tập

$$\overline{x} := \{y \in X \mid x\mathcal{R}y\}.$$

Tập hợp gồm tất cả các lớp tương theo quan hệ $\mathcal{R}$ thường được gọi là *tập thương* của X theo $\mathcal{R}$ và kí hiệu là $X/\mathcal{R}$. Vậy $X/\mathcal{R} = \{\overline{x} \mid x \in X\}$.

Dễ dàng thấy rằng nếu $x, y \in X$ thì hoặc là $\overline{x} = \overline{y}$ hoặc là $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$. Như vậy tập các lớp tương đương theo quan hệ $\mathcal{R}$ lập thành một phân hoạch của X, nghĩa là có một họ $(A_i)_{i\in I}$ những tập con của X (mỗi A_i là một lớp tương đương), $A_i \cap A_j = \emptyset$ nếu $i \neq j$ sao cho $X = \bigcup_{i\in I} A_i$.

Ngược lại nếu $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ sao cho $A_i \cap A_j = \emptyset$ nếu $i \neq j$ và $\bigcup_{i\in I} A_i = X$ thì

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X \mid \exists i \in I \text{ sao cho } x, y \in A_i\}$$

là một quan hệ tương đương trên X mà các lớp tương đương (theo $\mathcal{R}$) chính là các A_i.

1.3.2. Quan hệ thứ tự.

Một loại quan hệ khác trên X cũng có một vai trò quan trọng là quan hệ thứ tự. Một quan hệ, kí hiệu " $\leq$ ", trên X được gọi là *quan hệ thứ tự* (bộ phận) trên X (hay cũng nói "X được sắp bộ phận bởi $\leq$") nếu nó thoả mãn các điều kiện sau:

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

a) $x \leq x$, mọi $x \in X$,
b) $x \leq y$ và $y \leq x$ thì $x = y$ (phản xứng),
c) Nếu $x \leq y$ và $y \leq z$ thì $x \leq y$.

Bây giờ giả sử X là tập được sắp bởi quan hệ thứ tự bộ phận $\leq$. Tập con Y của X gọi là được *sắp thẳng* nếu với mọi cặp các phần tử $x, y \in Y$ ta có $x \leq y$ hay $y \leq x$.

Phần tử $u \in X$ được gọi là một cận trên của tập Y nếu $y \leq u$, mọi $y \in Y$.

Phần tử $m \in X$ được gọi là phần tử tối đại của X nếu quan hệ $m \leq x$, $x \in X$ kéo theo $x = m$ (lưu ý rằng X có thể có nhiều hơn một phần tử tối đại và cũng có thể không có phần tử tối đại). Phát biểu sau đây nêu lên một đảm bảo cho sự tồn tại phần tử tối đại đối với một tập hợp được sắp. Nó được gọi là Bổ đề Zorn. Người ta cũng chứng minh được nó tương với Tiên đề chọn.

Bổ đề Zorn. *Nếu mọi tập con sắp thẳng của X đều có một cận trên thì X có một phần tử tối đại.*

§2. SỐ THỰC.

2.1. Nguyên lí Supremum.

Cho M là một tập con không rỗng của tập số thực $\mathbf{R}$. Số $a \in \mathbf{R}$ được gọi là một *cận trên* (t.ư., *cận dưới*) của M nếu với mọi $x \in M$ ta đều có $x \leq a$ (t.ư.., $x \geq a$). Ở đây "$\leq$" là quan hệ thứ tự thông thường trên $\mathbf{R}$. Cũng để ý rằng cận trên hay cận dưới của một tập trong $\mathbf{R}$ nếu có sẽ không duy nhất.

Tập $M \subset \mathbf{R}$ được gọi là *bị chặn trên* (t.ư., *bị chặn dưới*) nếu M có ít nhất một cận trên (t.ư., cận dưới). Tính chất quan trọng sau đây thường được gọi là nguyên lí supremum.

2.1.1. Nguyên lí supremum. *Mọi tập con M khác rỗng của $\mathbb{R}$ bị chặn trên (t.ư., bị chặn dưới) đều tồn tại một cận trên bé nhất (t.ư., cận dưới lớn nhất).*

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

Cận trên bé nhất (t.ư., cận dưới lớn nhất) của tập M được gọi là *supremum* (t.ư., *infimum*) của M và được kí hiệu là sup M (t.ư., inf M).

2.1.2. Nhận xét. Các mệnh đề tương đương sau là đơn giản nhưng rất thuận tiện trong áp dụng:

$$\alpha = \sup M \Longleftrightarrow \begin{cases} (i)\ x \le \alpha, \forall x \in M, \\ (ii)\ \forall \alpha' < \alpha, \exists \bar{x} \in M : \alpha' < \bar{x} \le \alpha. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (i)\ x \le \alpha, \forall x \in M, \\ (ii')\ \forall \epsilon > 0, \exists \bar{x} \in M : \alpha - \epsilon < \bar{x} \le \alpha. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (i)\ x \le \alpha, \forall x \in M, \\ (ii'')\ \exists (x_n)_n \subset M : x_n \to \alpha\ (n \to \infty). \end{cases}$$

Với infimum ta cũng có các mệnh đề tương tự như trên. Xin độc giả hãy tự phát biểu.

Trong các chương sau ta cũng sẽ làm việc với tập số thực mở rộng $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, do đó để thuận tiện ta nêu ra một số quy ước sau:

Nếu $M \subset \mathbf{R}$, $M \neq \emptyset$ và không bị chặn trên (t.ư., không bị chặn dưới) thì ta quy ước sup $M = +\infty$ (t.ư., inf $M = -\infty$). Ngoài ra, inf $\emptyset = +\infty$. Xin lưu ý rằng nếu sup $M = +\infty$, các mệnh đề phát biểu trong Nhận xét 2.1.2 cần phải thay đổi ít nhiều cho phù hợp.

2.2. Tính trù mật của tập số hữu tỉ Q.

Với mỗi cặp số thực (a, b), $a < b$, bao giờ cũng tồn tại một số hữu tỉ r sao cho $a < r < b$.

2.3. Nguyên lí Archimède.

Với mọi số thực a, tồn tại $n \in \mathbf{N}$ sao cho $a < n$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

§3. CHUỖI SỐ

Phần này liệt kê một số kiến thức liên quan tới các chuỗi số dương được sử dụng thường xuyên trong các chương 3 và 4.

3.1. Chuỗi số dương và tính giao hoán.

Nhắc lại rằng nếu $(x_n)_n \subset \mathbf{R}$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ được gọi là *hội tụ* trong $\mathbf{R}$ nếu dãy tổng riêng $(s_n)_{n\in N}$ của nó hội tụ trong $\mathbf{R}$ ($s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i, n \in \mathbf{N}$).

Nếu $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ thì ta viết $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$ và nói chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ có tổng là $+\infty$. Trường hợp $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\infty$ cũng được hiểu hoàn toàn tương tự.

Một chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty.$$

Một chuỗi hội tụ tuyệt đối thì hội tụ trong $\mathbf{R}$.

Sau này ta sẽ xét đến các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ mà $x_n \in \overline{\mathbf{R}}, n \in \mathbf{N}$. Tổng của chuỗi trong trường hợp này cũng được định nghĩa như trước đây, là giới hạn của dãy tổng riêng $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ và là một số thuộc $\overline{\mathbf{R}}$. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ mà $x_n \in [0, +\infty]$, mọi $n \in \mathbf{N}$ được gọi là *chuỗi số dương*. Ta có kết quả sau:

WWW.MATHEDUCARE.COM

3.1.1. Định lí. *Nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *là một chuỗi dương thì với mọi song ánh* $\sigma : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, *ta đều có* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ *(chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *có tính giao hoán).*

Chứng minh. Gọi $a = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $b = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ (để ý $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$ và $a, b \geq 0$). Ta chỉ cần chứng minh $b \leq a$ là đủ ($a \leq b$ chứng minh tương tự). Mọi $n \in \mathbf{N}$, đặt $k = max\{\sigma(1), ..., \sigma(n)\}$. Khi đó

$$\sum_{m=1}^{n} x_{\sigma(m)} \leq \sum_{i=1}^{k} x_i \leq a.$$

Từ đây $b \leq a$ □

Lưu ý. Đôi khi ta cũng xét chuỗi số $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n$. Tổng của chuỗi này được hiểu là $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=-n}^{n} x_i$.

3.2. Chuỗi số kép.

Cùng với chuỗi số thông thường, các "chuỗi số kép" với số hạng không âm cũng được sử dụng trong giáo trình này. Ta nhắc lại một vài khái niệm và kết quả đáng quan tâm.

Nếu $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ là một dãy kép với $a_{n,m} \in [0, +\infty]$ thì với mỗi $n \in \mathbf{N}$ cố định, chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$ luôn hội tụ trong $\overline{\mathbf{R}}$ (tức có tổng là một số thực hay $+\infty$). Tổng của chuỗi kép $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$ (luôn tồn tại) được định nghĩa là

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\right).$$

Kết quả về sự thay đổi thứ tự lấy tổng được cho trong định lí sau:

3.2.1. Định lí. *Nếu* $a_{n,m} \in [0, \infty]$, *mọi* $m, n \in \mathbf{N}$ *thì*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}).$$

Chứng minh. Đặt $a = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$, $b = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n,m}$. Khi đó với mỗi $p, k \in \mathbf{N}$, ta có:

$$\sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{p} a_{n,m} = \sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{k} a_{n,m} \leq \sum_{m=1}^{p}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m})$$
$$\leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} = b.$$

Từ đây ta dễ dàng suy ra được rằng $a \leq b$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có $b \leq a$. Vậy $a = b$ □

Lưu ý. Người ta cũng chứng minh được kết quả tổng quát sau:

Nếu $a_{n,m} \in [0, +\infty]$ *mọi* $m, n \in \mathbf{N}$ *và* $\sigma : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ *là một song ánh thì*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{\sigma(n,m)}.$$

MATH-EDUCARE

§4. LỰC LƯỢNG CỦA CÁC TẬP HỢP

4.1. Tập hợp tương đương.

Hai tập hợp A và B được gọi là *tương đương* nếu tồn tại một song ánh từ A lên B.

Rõ ràng là hai tập hữu hạn và có cùng một số các phần tử thì tương đương nhau.

Hai tập hợp tương đương nhau thì ta nói chúng có cùng *lực lượng*. Khái niệm lực lượng là sự mở rộng của khái niệm số lượng các phần tử của một tập hợp.

4.2. Tập hợp đếm được.

4.2.1. Định nghĩa. Tập hợp A được gọi là tập *đếm được* nếu nó tương đương với tập các số tự nhiên $\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$. Nói cách khác, tồn tại một song ánh từ $\mathbf{N}$ lên A. Lúc này ta nói A có *lực lượng đếm được*.

Rõ ràng là nếu A là đếm được thì các phần tử của A có thể xếp thành dãy vô hạn $a_1, a_2, a_3, \cdots$.

4.2.2. Nhận xét.

(i) Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbf{Q}$ là tập đếm được.

(ii) Mọi tập con của một tập đếm được đều là tập hữu hạn hay đếm được.

(iii) Mọi tập vô hạn đều có chứa một tập con đếm được.

Ta nói một tập A là *không quá đếm được* nếu nó là tập hữu hạn hay đếm được.

4.2.3. Định lí. *Hợp của một họ hữu hạn hay đếm được các tập đếm được là một tập đếm được.*

4.2.4. Định lí. *Nếu thêm một tập hữu hạn hay đếm được vào một tập vô hạn thì không làm thay đổi lực lượng của tập hợp vô hạn này.*

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

4.2.5. Định lí. *Tập hợp tất cả các dãy hữu hạn có thể thành lập được từ các phần tử của một tập đếm được là một tập đếm được.*

4.2.6. Hệ qủa. *Tập hợp tất cả các đa thức* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, $n \in \mathbf{N}$ *với các hệ số hữu tỉ (nghĩa là các* $a_i \in \mathbf{Q}$*) là một tập đếm được.*

Ngoài các tập có lực lượng đếm được còn có những tập hợp vô hạn không đếm được (không phải là tập đếm được). Chẳng hạn, người ta chứng minh được rằng tập hợp các số thực $\mathbf{R}$ là một tập vô hạn và không phải là tập đếm được. Hơn nữa, $\mathbf{R}$ tương đương với khoảng (a, b) hay đoạn $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$. Lực lượng này được gọi là lực lượng *continum* và thường được kí hiệu là c.

BÀI TẬP

1. $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là họ một tập.

(a) Hãy xây dựng một họ $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sao cho : $B_n \subset B_{n+1}$ và $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(b) Hãy xây dựng một họ $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sao cho $B_n \cap B'_n = \emptyset$ nếu $n \neq n'$ và $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

(c) Giả sử thêm $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbf{N}$. Hãy xây dựng họ $(B_n)_n$ sao cho $B_n \cap B'_n = \emptyset$ nếu $n \neq n'$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ và $A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_i$.

2. $f : X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ. Chứng minh rằng các mệnh đề sau tương đương:

(a) f là một đơn ánh,

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, mọi $A, B \subset X$,

(c) Mọi cặp các tập $A, B \subset X$ mà $A \cap B = \emptyset$ thì

WWW.MATHEDUCARE.COM

$$f(A) \cap f(B) = \emptyset.$$

3. $f : X \longrightarrow Y$ là toàn ánh khi và chỉ khi

$$f(f^{-1}(B)) = B, \text{ mọi } B \subset Y.$$

4. Cho một thí dụ về một ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$ và hai tập $A, B \subset X$ sao cho :

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

5. Cho $f : X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ. Chứng tỏ rằng f là một đơn ánh khi và chỉ khi với mọi tập Z và mọi ánh xạ $g_1 : Z \longrightarrow X, g_2 : Z \longrightarrow X$ sao cho $f \circ g_1 = f \circ g_2$ thì $g_1 = g_2$.

Chương 1

KHÔNG GIAN MÊTRIC

A. Tóm tắt lí thuyết

Các phép chứng minh của các mệnh đề và định lí nêu trong phần này có thể tìm thấy trong các tài liệu tham khảo [DH].

§1. KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN MÊTRIC VÀ SỰ HỘI TỤ

1.1. Không gian mêtric.(*)

1.1.1. Định nghĩa. *Không gian mêtric* là một cặp (X, d) trong đó X là một tập hợp không rỗng còn $d : X \times X \to \mathbb{R}$ là một hàm (gọi là mêtric) thoả mãn những điều kiện sau:

(i) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$,

(ii) $d(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$,

(iii) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$,

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$ (bất đẳng thức tam giác).

Số thực $d(x, y)$ được gọi khoảng cách giữa x và y trong X.

1.1.2. Nhận xét.

(a) Điều kiện (i) được suy ra từ các điều kiện (ii) - (iv). Thật vậy với $x, y \in X$,

---

(*)Khái niệm không gian mêtric được đưa ra lần đầu tiên vào đầu thế kỷ 20 bởi nhà toán học Pháp M.R. Fréchet.

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = d(x,y) + d(y,x)$$
$$\leq 2d(x,y).$$

(b) Nếu $d' : X \times X \to \mathbf{R}$ thoả mãn các điều kiện (i), (iii), (iv) và

(ii') $\qquad x = y$ thì $d(x,y) = 0$

thì d' được gọi là một giả mêtric trên X và (X,d') gọi là không gian giả mêtric. Từ một giả mêtric d' trên X ta có thể xây dựng được một mêtric trên một tập thương thích hợp. Thật vậy, xét quan hệ tương đương, $\forall x, y \in X$,

$$x \sim y \Longleftrightarrow d'(x,y) = 0.$$

Khi đó với mọi $\bar{x}, \bar{y} \in X/\sim$ ($\bar{x}, \bar{y}$ là các lớp tương đương tương ứng của x và y), hàm d xác định bởi

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d'(x,y)$$

là một mêtric trên $X/\sim$.

(c) Nếu ρ là một hàm số xác định trên $X \times X$ thoả mãn (i),(ii) và (iv) thì bằng cách đặt

$$d(x,y) = \rho(x,y) + \rho(y,x), x, y \in X$$

ta được một mêtric trên X.

(d) (X,d) là một không gian mêtric. Khi đó với mọi $x, y, u, v \in X$, nhờ vào (iv) ta có:

$$|d(x,y) - d(u,v)| \leq d(x,u) + d(y,v). \qquad (1.1)$$

(e) A, B là các tập hợp con không rỗng của không gian mêtric $(X, d), x_0 \in X$. Ta định nghĩa:

$$d(x_0, A) := \inf_{y \in A} d(x_0, y).$$
$$d(A, B) := \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y).$$

Lúc này với mọi $x, y \in X$,

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y). \tag{1.2}$$

Ở đây ta sử dụng quy ước $\inf \emptyset = +\infty$. Hơn nữa, dễ thấy rằng nếu $d(A, B) \neq 0$ thì $A \cap B = \emptyset$. Điều ngược lại nói chung là không đúng.

1.2. Sự hội tụ trong không gian mêtric.

Giả sử (X, d) là một không gian mêtric, $x_0 \in X$ và $r > 0$. Các tập

$$B(x_0, r) := \{x \in X | \quad d(x, x_0) < r\},$$

$$\overline{B}(x_0, r) := \{x \in X | \quad d(x, x_0) \leq r\}$$

lần lượt được gọi là *hình cầu mở* và *hình cầu đóng* tâm x_0 bán kính r trong X. Một tập $A \subset X$ gọi là bị chặn nếu nó được chứa trong một hình cầu nào đó (mở hay đóng) của X.

Rõ ràng nếu $0 < r < r'$ thì $B(x_0, r') \supset B(x_0, r)$ và $\overline{B}(x_0, r') \supset \overline{B}(x_0, r)$. Hơn nữa, $B(x_0, r) \subset \overline{B}(x_0, r)$. Tuy nhiên đối với các không gian mêtric nào đó vẫn có thể xảy ra $B(x, r) = \overline{B}(x, r)$ hay $B(x, r) \supset \overline{B}(x_0, r)$ hay $B(x, r) \supset B(x, r')$ với $r < r'$ (xin độc giả tự tìm thí dụ).

1.2.1. Giả sử $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ là một dãy trong không gian mêtric (X, d) (đôi khi cũng nói tắt là không gian mêtric X nếu

không sợ nhầm lẫn), $x_0 \in X$. Dãy $(x_n)_n$ được gọi là *hội tụ* về x_0 trong X nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$. Lúc này ta gọi x_0 là giới hạn của dãy $(x_n)_n$ và kí hiệu $x_n \to x_0$ khi $n \to \infty$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Vậy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall \epsilon > 0, \exists n_0 > 0 \text{ sao cho } \forall n \geq n_0 \\ \text{thì } d(x_n, x_0) < \epsilon \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall \epsilon > 0, \exists n_0 > 0 \text{ sao cho } \forall n \geq n_0 \\ \text{thì } x_n \in B(x_0, \epsilon) \end{pmatrix}.$$

Như thế nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ thì với bất kì $\epsilon > 0$, chỉ có thể có nhiều lắm là một số hữu hạn các phần tử của dãy $(x_n)_n$ nằm ngoài hình cầu mở tâm x_0, bán kính ϵ.

1.2.2. Nhận xét.

(a) Từ bất đẳng thức tam giác ta dễ dàng suy ra được rằng giới hạn của một dãy trong không gian mêtric là duy nhất. Hơn nữa nếu $(x_n)_n \subset X$ hội tụ và có giới hạn là $x_0 \in X$ thì mọi dãy con của nó cũng hội tụ và có cùng giới hạn là x_0.

(b) Mêtric d là liên tục theo nghĩa : nếu $(x_n)_n, (y_n)_n \subset X$, $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ khi $n \to \infty$ thì $d(x_n, y_n) \to d(x_0, y_0)$ khi $n \to \infty$. Điều này có được từ bất đẳng thức (1.1),

$$|d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0)| \leq d(x_n, x_0) + d(y_n, y_0)$$

và tính hội tụ của các dãy $(x_n)_n, (y_n)_n$.

§2. TẬP MỞ, TẬP ĐÓNG TRONG KHÔNG GIAN MÊTRIC

Cho (X, d) là một không gian mêtric, $A, B \subset X$.

2.1. Tập mở, tập đóng.

Tập $A \subset X$ được gọi là *mở* trong (X, d) (hay nói gọn, A mở trong X) nếu với mọi $x \in A$, tồn tại $r > 0$ sao cho $B(x, r) \subset A$.

Tập $F \subset X$ được gọi là *đóng* trong X nếu $F^c := X \setminus F$ là tập mở trong X.

Như vậy các tập $\emptyset, X$ là các tập vừa mở vừa đóng trong X và A là mở trong X khi và chỉ khi A^c là đóng trong X. Hai định lí sau nêu lên các tính chất cơ bản của các tập đóng, mở trong X.

2.1.1. Định lí. *Cho (X, d) là một không gian mêtric. Khi đó:*

(i) Hợp của một số tùy ý các tập mở trong X là một tập mở trong X,

(ii) Giao của một số hữu hạn các tập mở trong X là một tập mở trong X.

2.1.2. Định lí. *Giả sử (X, d) là một không gian mêtric. Khi đó :*

(i) Giao của một số tùy ý các tập đóng trong X là một tập đóng trong X,

(ii) Hợp của một số hữu hạn các tập đóng trong X là một tập đóng trong X.

Tập số thực $\mathbf{R}$ với mêtric xác định bởi $d(x, y) = |x - y|, x, y \in \mathbf{R}$ (gọi là mêtric thông thường trên $\mathbf{R}$) là một không gian mêtric. Với mêtric này, mọi khoảng mở $(a, b) \subset \mathbf{R}$ đều là tập mở. Tập mở trong $\mathbf{R}$ có một cấu trúc đơn giản được phát biểu trong định lí sau:

MATH-EDUCARE

2.1.3. Định lí. *Mọi tập mở trong $\mathbb{R}$ đều là hợp của một số hữu hạn hay đếm được các khoảng mở rời nhau từng đôi.*

Trong $\mathbf{R}^n$ với khoảng cách Euclide,

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x = (x_1, ..., x_n), \quad y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$$

chúng ta không có được kết quả đẹp đẽ như trong $\mathbf{R}$ song ta vẫn có được mệnh đề sau:

2.1.4. Mệnh đề. *Mỗi tập mở khác rỗng của $\mathbb{R}^n$ đều là hợp của một số hữu hạn hay đếm được các hình cầu mở (các hình cầu này có thể có giao khác rỗng).*

Một cách khác để phân tích các tập mở trong $\mathbf{R}^n$ là dùng các hình hộp nửa mở. Giả sử $a = \vec{a}, b = \vec{b} \in \mathbf{R}^n$. Một hộp nửa mở xác định bởi a, b, kí hiệu $\Delta[a,b)$, là tập

$$\Delta[a,b) := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n | a_i \leq x_i < b_i, i = 1, ..., n\}.$$

Để ý rằng $\Delta[a,b)$ không là tập mở và có thể là tập $\emptyset$ (nếu có i_0 mà $b_{i_0} < a_{i_0}$).

2.1.5. Mệnh đề. *Mỗi tập mở trong $\mathbb{R}^n$ đều có thể được biểu diễn dưới dạng hợp của một số hữu hạn hay đếm được các hình hộp nửa mở rời nhau từng đôi một.*

Phép chứng minh của các Mệnh đề 2.1.4-2.1.5 có thể tìm thấy trong [V].

2.1.6. Không gian con. Cho A là một tập con của X. Khi đó $d_A := d_{|A\times A} : A \times A \to \mathbf{R}$ là một mêtric trên A. Không gian (A, d_A) được gọi là *không gian con* của (X,d). d_A được

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

gọi là mêtric cảm sinh bởi mêtric d lên tập A. Như vậy mỗi tập con A của X đều có thể xem là không gian con của nó.

Bây giờ giả sử $A \subset X$ và $B \subset A$. Khi đó có thể xem B là tập trong không gian (A, d_A) và cũng có thể xem nó là tập con của (X, d). Do đó có thể nói đến tính đóng (mở) của B trong (A, d_A) và trong (X, d). Mối quan hệ giữa các khái niệm này được làm sáng tỏ trong định lí sau đây.

2.1.7. Định lí. *(X, d) là không gian mêtric, $A \subset X$ và $B \subset A$.*

(i) B là tập mở trong A khi và chỉ khi $B = A \cap G$ với G là tập mở trong X,

(ii) B là tập đóng trong A khi và chỉ khi $B = A \cap F$ với F là tập đóng trong X.

Như vậy nếu A là tập mở (đóng) trong X thì B mở (đóng) trong A khi và chỉ khi B mở (đóng) trong X.

2.2. Phần trong, bao đóng của một tập trong không gian mêtric.

2.2.1. Phần trong. Giả sử A là một tập con trong không gian mêtric X. Ta định nghĩa *phần trong* của A, kí hiệu $\text{int}A$ hay $\overset{\circ}{A}$, là hợp của tất cả các tập mở chứa trong A. Vậy

$$\text{int}A := \bigcup_{\substack{G \text{mở} \\ G \subset A}} G.$$

2.2.2. Các tính chất đơn giản. Các khẳng định sau dễ dàng được suy ra từ định nghĩa phần trong của một tập:

(i) int A là mở mọi $A \subset X$ và int(int$A$) =int A,

(ii) int $A \subset A$, mọi $A \subset X$,

WWW.MATHEDUCARE.COM

(iii) $A \subset B$ thì int$A \subset$ int B,

(iv) int A là tập mở (trong X) lớn nhất chứa trong A, nghĩa là nếu G mở, $G \subset A$ thì $G \subset \text{int}A$.

(v) A mở khi và chỉ khi int$A = A$,

(vi) int A là tập tất cả các điểm trong của A (nghiã là tập những điểm $x \in X$ mà có $r > 0$ để $B(x, r) \subset A$).

2.2.3. Bao đóng. Bao đóng của A (trong X), kí hiệu là $\bar{A}$ hay cl(A), được định nghĩa là tập:

$$\overline{A} := \bigcap_{\substack{F \text{đóng} \\ F \supset A}} F .$$

2.2.4. Các tính chất đơn giản. Tương tự như phần trong của một tập, với bao đóng ta có các tính chất sau:

(i) $\overline{A}$ đóng với mọi $A \subset X$, $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$,

(ii) $A \subset \overline{A}$, mọi $A \subset X$,

(iii) $A \subset B$ thì $\overline{A} \subset \overline{B}$,

(iv) $\overline{A}$ là tập đóng bé nhất chứa A, nghĩa là mọi tập F đóng và $F \supset A$ thì $F \supset \overline{A}$,

(v) A đóng khi và chỉ khi $\overline{A} = A$.

2.3. Điểm tụ, điểm dính của một tập.

Một tập U có chứa một hình cầu tâm $x \in X$ (bán kính $r > 0$ nào đó) gọi là một lân cận của điểm x. Ta thường dùng kí hiệu $U(x)$ để chỉ lân cận của điểm x. Mọi $r > 0$, $B(x, r)$ là một lân cận của x và thường được gọi là *r-lân cận* của x.

2.3.1. Điểm dính.

Điểm $x \in X$ được gọi là *điểm dính* của A nếu với mọi lân cận $U(x)$ của x đều có $U(x) \cap A \neq \emptyset$. Vậy

$$(x \text{ là điểm dính của} A) \Leftrightarrow (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset).$$

2.3.2. Điểm tụ. Điểm $x \in X$ được gọi là *điểm tụ* của tập A nếu với mọi lân cận $U(x)$ của $x, U(x) \cap A$ chứa ít nhất một điểm khác với x. Dễ thấy rằng

$$(x \text{ là điểm tụ của } A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall r > 0, B(x,r) \cap A \\ \text{là tập vô hạn} \end{pmatrix}.$$

2.3.3. Nhận xét.

(i) Mọi điểm tụ của A đều là điểm dính của A (điều ngược lại nói chung không đúng). Điểm tụ hay điểm dính của một tập có thể thuộc tập đó hoặc không. Chẳng hạn, $A = (0,1] \cup \{2\}$ thì 0,1 và các điểm thuộc $(0,1)$ đều là các điểm tụ của A; các điểm dính của A bao gồm A và các điểm 0, 2.

$$(x \text{ là điểm dính của } A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \exists (x_n)_n \subset A, x_n \to x \\ \text{khi } n \to \infty \end{pmatrix}$$

$$(x \text{ là điểm tụ của } A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \exists (x_n)_n \subset A, x_n \neq x_{n'}, \text{ nếu} \\ n \neq n' \text{ và } x_n \to x \\ \text{khi } n \to \infty \end{pmatrix}$$

Bây giờ chúng ta tìm mối quan hệ giữa $\overline{A}$ và các điểm dính của A. Từ định nghĩa $\overline{A}$ ta có:

$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{đóng } \supset A} F = \bigcap_{G \text{mở } \subset A^c} G^c = \left(\bigcup_{G \text{mở } \subset A^c} G\right)^c = (\text{int} A^c)^c. \qquad (*)$$

Để ý rằng

$$(x \in \text{ int } A^c) \Leftrightarrow (\exists r > 0 : B(x,r) \subset A^c = X \backslash A). \qquad (**)$$

Do đó từ (*) và (**) ta có:

$$\begin{aligned}(x \in \overline{A}) &\Leftrightarrow (x \notin \text{ int } A^c) \\ &\Leftrightarrow (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow (x \text{ là điểm dính của } A).\end{aligned}$$

Ta đã chứng minh được hệ quả sau:

2.3.4. Hệ quả. *$\overline{A}$ là tập tất cả các điểm dính của A.*

Kết hợp Nhận xét 2.3.3 và Hệ quả 2.3.4 ta được:

2.3.5. Hệ quả. *A đóng khi và chỉ khi A chứa mọi điểm dính của nó.*

2.3.6. Hệ quả.

$$(A \text{ đóng}) \Leftrightarrow (\forall (x_n)_n \subset A, x_n \to x (n \to \infty) \text{ thì } x \in A).$$

Hệ quả 2.3.6 cho ta một tiêu chuẩn rất thuận tiện để kiểm tra tính đóng của một tập A.

2.4. Tập trù mật, không gian khả li.

Giả sử $A, B \subset X$. Ta nói tập A là *trù mật trong* B nếu $B \subset \overline{A}$.

Nếu $\overline{A} = X$ thì ta nói A *trù mật trong* X.

MATH-EDUCARE

Như thế nếu A trù mật trong X thì mọi $x \in X$ đều là điểm dính của A. Điều này có thể diễn tả lại như sau:

$$(A \text{ trù mật trong } X) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall x \in X, \exists (x_n)_n \subset A, x_n \to x \\ \text{khi } n \to \infty \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall x \in X, \forall r > 0, \\ \exists a \in A : a \in B(x, r) \end{pmatrix}.$$

Mệnh đề tương đương cuối cùng có nghĩa là tại bất kì điểm x nào của X nếu ta vẽ một hình cầu bất kì (bán kính $r > 0$) thì hình cầu đó cũng có chứa ít nhất một điểm của A. Điều này nói lên ý nghĩa cơ bản của tính trù mật.

Một không gian mêtric có một tập con đếm được trù mật trong nó được gọi là một *không gian khả li*. Các không gian $\mathbf{R}$ (chứa tập hữu tỉ $\mathbf{Q}$ đến được, trù mật), $\mathbf{R}^n$ (chứa tập đếm được $\mathbf{Q}^n$ trù mật) là những thí dụ đơn giản về các không gian mêtric khả li.

§3. ÁNH XẠ LIÊN TỤC

3.1. Ánh xạ liên tục

3.1.1. Định nghĩa và các tính chất đơn giản. Giả sử $(X, d), (Y, d')$ là các không gian mêtric, $f : X \to Y$ là một ánh xạ, $A \subset X$ và $x_0 \in X$ là một điểm cho trước.

• Ánh xạ f được gọi là *liên tục* (LT) tại x_0 nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ (có thể phụ thuộc vào ϵ và x_0) sao cho với mọi $x \in X$ mà $d(x, x_0) < \delta$ thì $d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. Định nghĩa trên có thể được diễn tả lại dưới nhiều ngôn ngữ khác

WWW.MATHEDUCARE.COM

nhau như sau.

$$
\begin{aligned}
(f \text{ LT tại } x_0) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, \\ d(x, x_0) < \delta \text{ thì } d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ sao cho } x \in \\ B(x_0, \delta) \text{ thì } f(x) \in B(f(x_0), \epsilon) \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(B(x_0, \delta)) \\ \subset B(f(x_0), \epsilon)) \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \\ f^{-1}(B(f(x_0), \epsilon)) \supset B(x_0, \delta) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

• Ta nói f *liên tục trên* X nếu nó liên tục tại mọi $x \in X$.

• Nếu f liên tục tại mọi $x \in A$ $(A \subset X)$ thì ta nói f *liên tục trên* A.

Để ý rằng khái niệm "f liên tục trên A" ở đây nói chung không trùng với khái niệm "$f_{|A} : A \to Y$ là liên tục" (xin độc giả tự tìm các thí dụ minh họa).

• Ánh xạ $f : X \to Y$ gọi là *liên tục đều* trên X nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ (chỉ phụ thuộc vào ϵ) sao cho với mọi $x, y \in X, d(x, y) < \delta$ thì $d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

Dễ thấy rằng một ánh xạ liên tục đều trên X thì liên tục trên X. Điều ngược lại nói chung không đúng, chẳng hạn, hàm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2$ là liên tục trên $\mathbf{R}$ nhưng không liên tục đều. Thật vậy với $\delta > 0$ tuỳ ý thì $f(x + \delta) - f(x) = \delta(2x + \delta)$ có thể lấy những giá trị lớn tuỳ ý. Một thí dụ về ánh xạ liên tục đều là ánh xạ $f : X \to \mathbf{R}$ với $f(x) := d(x, A), (\emptyset \neq A \subset X$ cho trước, xem (1.2)).

Các định lí sau đây nêu lên các đặc trưng cơ bản của các ánh xạ liên tục trên các không gian mêtric cũng như cho ta các tiêu chuẩn hữu hiệu để kiểm tra tính liên tục của một ánh xạ (tại một điểm, trên X).

MATH-EDUCARE

3.1.2. Định lí. (tiêu chuẩn qua dãy) *Ánh xạ f liên tục tại x_0 khi và chỉ khi với mọi dãy $(x_n)_n \subset X, x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to f(x_0)$ (khi $n \to \infty$).*

3.1.3. Định lí. *X, Y là các không gian mêtric, $f : X \to Y$ là một ánh xạ. Khi đó các mệnh đề sau đây là tương đương:*

(i) f liên tục trên X,

(ii) với mọi tập mở $G \subset Y, f^{-1}(G)$ là tập mở trong X,

(iii) với mọi tập đóng $F \subset Y, f^{-1}(F)$ là tập đóng trong X,

(iv) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, mọi $A \subset X$.

3.1.4. Định lí. *Cho X, Y, Z là ba không gian mêtric, $x_0 \in X$, $f : X \to Y$ liên tục tại x_0 và $g : Y \to Z$ liên tục tại $y_0 = f(x_0)$. Khi đó ánh xạ hợp $g \circ f : X \to Z$ liên tục tại x_0.*

3.2. Ánh xạ đồng phôi và mêtric tương đương.

3.2.1. Phép đồng phôi.

Cho (X, d), (Y, d') là các không gian mêtric. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một *phép đồng phôi* từ X lên Y nếu f là một song ánh liên tục và ánh xạ ngược của nó cũng là ánh xạ liên tục từ Y lên X. Lúc này các không gian X, Y được gọi là các *không gian đồng phôi* với nhau.

3.2.2. Nhận xét.

(i) Theo Định lí 3.1.3, một phép đồng phôi từ X lên Y biến một tập mở (đóng) trong X thành một tập mở (đóng) trong Y. Họ các tập mở trong một không gian mêtric (X, d) thường được gọi là một tôpô trên X (sinh bởi d). Dễ thấy các khái niệm lân cận, tập đóng, điểm dính, bao đóng, phần trong,

WWW.MATHEDUCARE.COM

tập trù mật,... chỉ phụ thuộc vào tôpô đang khảo sát trên X và chúng được gọi là các khái niệm tôpô (các khái niệm hình cầu, tập bị chặn, bán kính, ... không phải là các khái niệm tôpô). Như vậy, một phép đồng phôi biến một tôpô trên không gian này thành một tôpô trên không gian kia và ngược lại. Từ đây cũng dễ thấy rằng các tính chất tôpô của không gian mêtric là bất biến qua các phép đồng phôi, chẳng hạn nếu x là điểm dính của A thì $f(x)$ là điểm dính của $f(A)$ hay A trù mật trong X thì $f(A)$ trù mật trong $f(X) = Y$, ...

(ii) Để ý rằng các phép đồng phôi có thể không liên tục đều. Một thí dụ minh hoạ điều này có thể lấy ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ với $f(x) = x^3, x \in \mathbf{R}$.

3.2.3. Phép đẳng cự. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một *phép đẳng cự* từ X lên Y nếu f là một song ánh và với mọi $x, y \in X$ ta đều có $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Lúc này ta nói các không gian X và Y là đẳng cự với nhau.

Rõ ràng một phép đẳng cự là một phép đồng phôi. Các không gian mêtric đẳng cự thường được đồng nhất với nhau.

Trên một tập nền X, như ta đã thấy, có thể cho nhiều mêtric khác nhau để được nhiều không gian mêtric nói chung là khác nhau.

3.2.4. Mêtric tương đương. Hai mêtric d và ρ trên X gọi là *tương đương tôpô* với nhau (cũng kí hiệu $d \sim \rho$) nếu ánh xạ đồng nhất id : $(X, d) \to (X, \rho)$ là một phép đồng phôi.

3.2.5. Nhận xét.

$$(i)\ d \sim \rho \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall (x_n)_n \subset X, x_n \to x \text{ trong } (X,d) \\ \text{khi và chỉ khi } x_n \to x \text{ trong } (X,\rho) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall A \subset X, x \in X, d(x,A) = 0 \text{ khi và chỉ khi} \\ \rho(x,A) = 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha)\ \forall \epsilon > 0, \forall x \in X, \exists \delta_1 > 0 : \forall x' \in X \\ \qquad \rho(x,x') < \delta \text{ thì } d(x,x') < \epsilon \\ (\beta)\ \forall \epsilon > 0, \forall x \in X, \exists \delta_2 > 0 : \forall x' \in X \\ d(x,x') < \delta \text{ thì } \rho(x,x') < \epsilon. \end{cases}$$

(ii) Từ định nghĩa và Nhận xét 3.2.4 ta suy ra ngay rằng nếu $d \sim \rho$ thì họ các tập mở (tôpô) trong (X,d) và (X,ρ) trùng nhau. Do đó các khái niệm tôpô trên hai không gian này cũng trùng nhau, chẳng hạn, $A \subset X$ thì $\overline{A}^{\rho}$ (bao đóng trong (X,ρ)) và $\overline{A}^{d}$ (bao đóng trong (X,d)) bằng nhau: $\overline{A}^{\rho} = \overline{A}^{d}$.

Hai mêtric ρ và d trên X được gọi là *tương đương đều* nếu tồn tại $m, M > 0$ sao cho với mọi $x, x' \in X$ ta có:

$$md(x,y) \leq \rho(x,y) \leq Md(x,y).$$

Rõ ràng rằng hai mêtric tương đương đều thì tương đương tôpô.

§4. KHÔNG GIAN MÊTRIC ĐỦ

Cho (X,d) là một không gian mêtric.

4.1. Định nghĩa.

4.1.1. Định nghĩa. Dãy $(x_n)_n \subset X$ được gọi là dãy *cơ bản* (hay dãy Cauchy) nếu $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$. Nói một

WWW.MATHEDUCARE.COM

cách khác

$$((x_n)_n \subset X \text{ là dãy cơ bản}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall \epsilon > 0, \exists n_0 > 0 : \forall m, \\ n \geq n_0 \text{ thì } d(x_n, x_m) < \epsilon \end{pmatrix}.$$

4.1.2. Nhận xét.

(i) Mọi dãy hội tụ trong X đều là dãy cơ bản.

(ii) Một dãy cơ bản $(x_n)_n \subset X$ có một dãy con hội tụ đến $x_0 \in X$ thì $(x_n)_n$ cũng hội tụ về x_0.

(iii) Theo nguyên lí Cauchy, mọi dãy cơ bản trong $\mathbf{R}$ đều hội tụ. Tuy nhiên trong một không gian mêtric tuỳ ý điều này nói chung không đúng. Chẳng hạn, không gian $\mathbf{Q}$ các số hữu tỉ với mêtric $d(x, y) = |x - y|, x, y \in \mathbf{Q}$, chứa dãy cơ bản $(x_n)_n$ với $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbf{N}$ nhưng dãy này không hội tụ trong $\mathbf{Q}$.

• Không gian mêtric (X, d) được gọi là *đầy đủ* nếu mọi dãy cơ bản trong X đều hội tụ.

4.1.3. Nhận xét.

(i) Tầm quan trọng cơ bản của các không gian đầy đủ là ở chỗ để chứng minh một dãy trong không gian này là hội tụ ta chỉ cần chứng tỏ nó là một dãy cơ bản (khác biệt so với việc sử dụng định nghĩa là ở đây ta không cần phải biết trước giới hạn của dãy này).

(ii) Tính đầy đủ (hay không) của một không gian mêtric phụ thuộc chủ yếu vào mêtric trên nó (chứ không phải tập nền X). Để làm thí dụ có thể xét tập $C_{[a,b]}$ các hàm số liên tục trên $[a, b] \subset \mathbf{R}$ với các mêtric

$$d(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)|$$
$$\rho(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|, x,y \in C_{[a,b]}.$$

Khi đó $(C_{[a,b]}, d)$-cũng thường gọi là $C_{[a,b]}$- là đủ còn $C^L_{[a,b]} := (C_{[a,b]}, \rho)$ là không đầy đủ.

(iii) M là một không gian con đầy đủ của X thì M đóng trong X.

(iv) Trong một không gian đầy đủ, mọi tập con đóng của nó đều là không gian con đầy đủ.

4.2. Các tính chất cơ bản.

Dãy các hình cầu $B_1, B_2, ..., B_n, ...$ trong X có bán kính lần lượt là $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ được gọi là *thắt lại* nếu $B_n \supset B_{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}$ và $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

4.2.1. Định lí. (Cantor) *Để một không gian mêtric X là đầy đủ điều kiện cần và đủ là mọi dãy các hình cầu đóng thắt lại trong X đều có một điểm chung duy nhất.*

• Một tập con M của X được gọi là tập *không đâu trù mật* (hay tập thưa) nếu nó không trù mật trong bất kì hình cầu nào trong X. Nói cách khác

$$(M \text{ không đâu trù mật}) \Leftrightarrow \text{int}\overline{M} = \emptyset$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{mọi hình cầu mở } B \subset X \\ \text{đều tồn tại hình cầu} \\ B_1 \subset B \text{ mà } B_1 \cap M = \emptyset \end{pmatrix}.$$

• Tập $A \subset X$ được gọi là *tập thuộc phạm trù I* nếu $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ với M_i là không đâu trù mật, mọi $i \in \mathbf{N}$. Tập không phải là tập thuộc phạm trù I gọi là *tập thuộc phạm trù*

MATH-EDUCARE

II. Định lí sau đây là một kết quả sâu sắc và có nhiều áp dụng trong nhiều ngành của giải tích.

4.2.2. Định lí. (Định lí Baire về phạm trù) *Nếu X là không gian mêtric đầy đủ thì X là một tập thuộc phạm trù II.*

4.2.3. Hệ quả. Nếu X là đầy đủ và $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ thì tồn tại $i_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $\text{int}\overline{M}_{i_0} \neq \emptyset$.

4.3. Nguyên lí ánh xạ co Banach.

• Cho $f : X \to X$ là một ánh xạ. Điểm $x^* \in X$ được gọi là *điểm bất động* của f nếu $f(x^*) = x^*$.

• Ánh xạ $f : X \to X$ được gọi là một *ánh xạ co* nếu tồn tại $\alpha \in [0, 1)$ sao cho

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \text{ mọi } x, y \in X.$$

Rõ ràng rằng nếu f là một ánh xạ co thì f liên tục đều trên X.

Định lí sau đây gọi là Nguyên lí ánh xạ co Banach và đóng một vai trò rất quan trọng trong nhiều lĩnh vực của toán học, đặc biệt là lí thuyết các phương trình vi phân, phương trình tích phân, bất đẳng thức biến phân,...

4.3.1. Định lí. (Nguyên lí ánh xạ co Banach) *Giả sử X là một không gian mêtric đầy đủ và $f : X \to X$ là một ánh xạ co. Khi đó f có duy nhất một điểm bất động.*

4.3.2. Nhận xét.

(i) Sự tồn tại điểm bất động x^* (của f) trong Định lí 4.3.1 thường được chứng minh bằng phương pháp xấp xỉ. Cụ thể là xuất phát từ một điểm tuỳ ý $x_0 \in X$ và đặt $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), ..., x_n = f(x_{n-1}), ...$ Dãy $(x_n)_n \subset X$ sẽ là dãy cơ bản

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

và hội tụ về điểm bất động x^* duy nhất của f. Dãy $(x_n)_n$ chính là dãy xấp xỉ của nghiệm của phương trình $f(x) - x = 0$. Sai số ở bước xấp xỉ thứ n (tức x_n) được đánh giá bởi công thức

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, f(x_0)).$$

(ii) Lưu ý rằng không chỉ các ánh xạ co mới có điểm bất động. Chẳng hạn, một hàm $f : [a, b] \to [a, b]$ liên tục (không nhất thiết là ánh xạ co) thì có điểm bất động (xin độc giả hãy tự chứng minh điều này).

4.4. Đầy đủ hoá không gian mêtric.

Chúng ta đã thấy được tầm quan trọng của các không gian mêtric đầy đủ. Một điều thú vị là mọi không gian mêtric không đầy đủ đều có thể được "bổ sung" để được một không gian đầy đủ theo nghĩa của định lí sau:

4.4.1. Định lí. *Đối với mọi không gian mêtric tuỳ ý đều tồn tại một không gian mêtric đầy đủ $\hat{X}$ sao cho*

(i) X là không gian mêtric con của $\hat{X}$,

(ii) X trù mật khắp nơi trong $\hat{X}$.

Không gian mêtric đầy đủ $\hat{X}$ thoả mãn (i) và (ii) là duy nhất sai khác một phép đẳng cự và được gọi là một "đầy đủ hoá" (hay là "bổ sung") của không gian X.

§5 KHÔNG GIAN COMPACT

5.1. Tập compact và không gian compact.

Cho (X, d) là một không gian mêtric và $A \subset X$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

5.1.1. Định nghĩa. Tập A được gọi là *hoàn toàn bị chặn* nếu với mọi $\epsilon > 0$, A đều được phủ bởi một số hữu hạn các hình cầu bán kính ϵ, nghĩa là, tồn tại $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ sao cho $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$. Nói một cách khác:

$$(A \text{ hoàn toàn bị chặn}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall \epsilon > 0, \exists x_1, ..., x_n \in X : \\ \forall x \in A, \exists i_0 \in \{1, ..., n\} \\ \text{để } d(x, x_{i_0}) < \epsilon. \end{pmatrix}.$$

• Với $\epsilon > 0$ cho trước, một tập $M \subset X$ được gọi là một *ϵ-lưới* cho tập A nếu $\forall x \in A, \exists y \in M$ sao cho $d(x, y) < \epsilon$. Nếu M là tập hữu hạn thì ta nói M là ϵ-lưới hữu hạn cho A. Vậy có thể phát biểu

$$(A \text{ hoàn toàn bị chặn}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall \epsilon > 0, \text{ tồn tại một } \epsilon\text{-lưới} \\ \text{hữu hạn cho } A \end{pmatrix}.$$

5.1.2. Nhận xét.

(i) Một tập hoàn toàn bị chặn thì bị chặn (xem 1.2, §1).

(ii) Trong $\mathbf{R}^n$ khái niệm bị chặn và hoàn toàn bị chặn là tương đương nhau, nghĩa là $A \subset \mathbf{R}^n$, A bị chặn khi và chỉ khi A hoàn toàn bị chặn.

(iii) Nếu bản thân X hoàn toàn bị chặn thì X khả li. Thật vậy, với mỗi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại $\frac{1}{n}$-lưới hữu hạn M_n cho A. Khi đó dễ chứng minh được $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ là tập đếm được trù mật trong X.

5.1.3. Định nghĩa. Tập $A \subset X$ được gọi là *compact* nếu với mọi dãy $(x_n)_n \subset A$ đều tồn tại một dãy con $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ hội tụ về một điểm $x_0 \in A$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

• Nếu X là tập compact thì ta nói X là *không gian compact.*

• Tập $A \subset X$ được gọi là *compact tương đối* trong X nếu $\overline{A}$ là tập compact.

Từ định nghĩa tập (không gian) compact ta có ngay các khẳng định sau:

5.1.4. Nhận xét.

(i) Một không gian mêtric compact thì đầy đủ.

(ii) A là tập compact thì A đóng trong X.

Các định lí sau đây là các kết quả quan trọng và sâu sắc.

5.1.5. Định lí. (Hausdorff) *X là không gian mêtric, $A \subset X$. Khi đó*

(i) Nếu A compact thì A đóng và hoàn toàn bị chặn trong X,

(ii) Nếu A đóng và hoàn toàn bị chặn còn X là đầy đủ thì A là compact.

Từ các Nhận xét 5.1.2, 5.1.4. và Định lí 5.1.5 ta có ngay các hệ quả sau.

5.1.6. Hệ quả. *Giả sử $A \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó A là compact khi và chỉ khi A đóng và bị chặn.*

5.1.7. Hệ quả. *Nếu X là compact thì X đầy đủ và khả li.*

5.1.8. Định lí. (Heihn-Borel) *Để một tập $A \subset X$ là compact, điều kiện cần và đủ là với mọi họ các tập mở $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ mà $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \supset A$, tồn tại một số hữu hạn các tập của họ này $G_{\alpha_1}, ..., G_{\alpha_k}$ sao cho $\bigcup_{i=1}^{k} G_{\alpha_i} \supset A$.*

MATH-EDUCARE

• Một họ các tập (mở) con của X, $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ mà $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha \supset A$ thường được gọi là một *phủ* (t.ư *phủ mở*) của A. Nếu I hữu hạn thì phủ (t.ư phủ mở) $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ được gọi là một phủ (mở) hữu hạn của A. Nếu $J \subset I$ và $\cup_{\alpha\in J} G_\alpha \supset A$ thì $(G_\alpha)_{\alpha\in J}$ được gọi là một *phủ con* của phủ $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$. Vậy Định lí 5.1.8 có thể phát biểu lại : " A compact khi và chỉ khi mọi phủ mở của A đều tồn tại phủ con hữu hạn".

5.1.9. Nhận xét. Để ý rằng nếu $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ làm một phủ mở của X thì vì $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha = X$ nên $\left(\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha\right)^c = \emptyset$ hay $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset$ với $F_\alpha := G_\alpha^c$. Một hệ quả trực tiếp của Định lí Heihn-Borel là:

$$X \text{ compact} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\forall (F_\alpha)_{\alpha\in I}, F_\alpha \text{ là đóng trong } X, \text{ mọi} \\ \alpha\in I \text{ và } \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset \text{ thì tồn tại} \\ \alpha_1, \ldots \alpha_n \in I \text{ sao cho } \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset\end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\forall (F_\alpha)_{\alpha\in I}, F_\alpha \text{ là đóng , mọi } \alpha\in I \text{ mà} \\ \forall J \subset I, J \text{ hữu hạn, } \bigcap_{\alpha\in J} F_\alpha \neq \emptyset \\ \text{thì } \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha \neq \emptyset\end{array}\right).$$

• Một họ các tập $(F_\alpha)_{\alpha\in I}$ trong X được gọi là *họ có tâm* nếu với mọi tập $J \subset I, J$ hữu hạn thì $\bigcap_{\alpha\in J} F_\alpha \neq \emptyset$. Ta có hệ quả sau:

5.1.10. Hệ quả. *Không gian mêtric X là compact khi và chỉ khi mọi họ tập đóng có tâm trong X đều có giao khác rỗng.*

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

5.2. Ánh xạ và hàm số liên tục trên tập compact.

Các ánh xạ và hàm số liên tục trên các tập compact cũng có được các tính chất "đẹp đẽ" như các hàm số liên tục trên một đoạn $[a, b]$ trong $\mathbf{R}$, chẳng hạn, tính liên tục đều, bị chặn, đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất. Cụ thể, ta có các định lí sau.

5.2.1. Định lí. *Giả sử X, Y là các không gian mêtric, $f : X \to Y$ là một ánh xạ và $A \subset X$ là một tập compact. Khi đó nếu f liên tục trên A thì f liên tục đều trên A.*

5.2.2. Định lí. *Giả sử $f : X \to Y$ là một ánh xạ liên tục, $A \subset X$ là tập compact. Khi đó $f(A)$ là tập compact.*

5.2.3. Định lí. *$A \subset X$ là tập compact và $f : A \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục. Khi đó f bị chặn và đạt được giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên A.*

5.3. Xấp xỉ hàm liên tục bằng đa thức, Định lí Weierstrass.

Xét không gian $C_{[0,1]}$ các hàm số liên tục trên $[0, 1]$ với mêtric "max". Gọi W là không gian con của $C_{[0,1]}$ gồm tất cả các đa thức dạng

$$g(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, n \in \mathbf{N}, x \in [0, 1].$$

5.3.1. Định lí. (Weierstrass I) *Với mọi $f \in C_{[0,1]}$, mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $g \in W$ sao cho $d(f, g) < \epsilon$.*

5.3.2. Nhận xét.

(i) Định lí 5.3.1 cho thấy mọi hàm số liên tục trên $[0, 1]$ đều có thể được xấp xỉ bởi một đa thức (trên $[0, 1]$) với độ chính xác tuỳ ý.

WWW.MATHEDUCARE.COM

(ii) Từ Định lí 5.3.1 ta cũng có ngay rằng với mọi $f \in C_{[0,1]}$, tồn tại một dãy $(g_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset W$ sao cho $g_n f$ trong $C_{[0,1]}$ (hội tụ đều). Một cách diễn đạt khác: W trù mật trong $C_{[0,1]}$.

5.3.3. Định lí. *Với mỗi $g \in W$ và với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại một đa thức $g^* \in W$ với hệ số hữu tỉ (tức các $a_i \in \mathbf{Q}$) sao cho $d(g, g^*) < \epsilon$.*

Các kết luận ở Định lí 5.3.1, 5.3.3 còn đúng cho $C_{[a,b]}$ với $[a, b] \subset \mathbf{R}$ tuỳ ý. Ngoài ra vì tập các đa thức trên $[a, b]$ với các hệ số hữu tỉ là tập đếm được nên một hệ quả trực tiếp của hai định lí trên là.

5.3.4. Định lí. *Không gian $C_{[a,b]}$ là khả li.*

5.4. Tiêu chuẩn compact trong $C_{[a,b]}$- Định lí Azelà-Ascoli.

5.4.1. Các định nghĩa.

Giả sử $A \subset C_{[a,b]}$.

• Tập A được gọi là *bị chặn từng điểm* trên $[a, b]$ nếu với mọi x thuộc $[a, b]$, tồn tại $K_x > 0$ sao cho $|f(x)| \leq K_x$, mọi $f \in A$. Tập A được gọi là *bị chặn đều* trên $[a, b]$ nếu tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(x)| \leq M$, mọi $x \in [a, b]$, mọi $f \in A$.

• A được gọi là *đồng liên tục tại* $x_0 \in [a, b]$ nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ (δ nói chung phụ thuộc vào x_0 và ϵ) sao cho với mọi $y \in [a, b], |y - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, với mọi $f \in A$. A được gọi là *đồng liên tục* trên $[a, b]$ nếu nó đồng liên tục tại mọi $x \in [a, b]$.

• A được gọi là *đồng liên tục đều* trên $[a, b]$ nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ (δ chỉ phụ thuộc vào ϵ) sao cho với mọi $x, x' \in [a, b], |x - x'| < \delta$ thì $|f(x) - f(x')| < \epsilon$, mọi $f \in A$.

MATH-EDUCARE

5.4.2. Định lí. (Azelà-Ascoli) *Cho* $A \subset C_{[a,b]}$.

(i) Nếu A *là compact tương đối trong* $C_{[a,b]}$ *thì* A *bị chặn đều và đồng liên tục đều trên* $[a,b]$.

(ii) Nếu A *bị chặn từng điểm và đồng liên tục trên* $[a,b]$ *thì* A *là compact tương đối trong* $C_{[a,b]}$.

Định lí 5.4.2. cho ta một tiêu chuẩn rất thuận tiện để kiểm tra tính compact (compact tương đối) của một tập trong không gian $C_{[a,b]}$. Định lí này cũng được mở rộng ra cho không gian $C(X)$ (thay vì $C_{[a,b]}$) gồm các hàm liên tục trên không gian compact X với mêtric

$$d(f,g) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in C(X).$$

§6. KHÔNG GIAN LIÊN THÔNG

6.1. Không gian liên thông.

6.1.1. Định nghĩa. Không gian mêtric X được gọi là *liên thông* nếu không tồn tại hai tập mở khác rỗng $A, B \subset X$ sao cho $A \cup B = X, A \cap B = \emptyset$. Nói cách khác một không gian X là liên thông nếu trong X không có một tập nào vừa mở vừa đóng khác với $\emptyset$ và X. Tập $A \subset X$ được gọi là liên thông nếu không gian con A là liên thông.

6.1.2. Nhận xét.

(i) Không gian $\mathbf{R}$ là liên thông và tập $A \subset \mathbf{R}$ là liên thông khi và chỉ khi A là một khoảng (bị chặn hay không bị chặn, đóng, mở, hay nửa đóng hay nửa mở).

(ii) A là tập liên thông trong X thì $\overline{A}$ là liên thông.

WWW.MATHEDUCARE.COM

6.2. Các tính chất.

6.2.1. Định lí. *Giả sử* $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ *là một họ những tập liên thông trong không gian mêtric* X *và* $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset$. *Khi đó* $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ *là một tập liên thông trong* X.

6.2.2. Nhận xét. Trong Định lí 6.2.1 nếu $I = \{1, 2\}$, ta được: nếu A_1, A_2 là các tập liên thông và $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ thì $A_1 \cup A_2$ liên thông. Từ đây bằng quy nạp ta được:

Nếu $A_1, ..., A_n$ lấ những tập liên thông trong X và $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset, i = 1, ..., n-1$ thì $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ là tập liên thông trong X.

6.2.3. Định lí. X, Y *là những không gian mêtric và* $f : X \to Y$ *là một ánh xạ liên tục. Khi đó nếu* $A \subset X$ *liên thông thì* $f(A)$ *là tập liên thông trong* Y.

6.2.4. Nhận xét. Từ Định lí 6.2.3 và cấu trúc của tập liên thông trong $\mathbf{R}$ (Nhận xét 6.1.2) ta suy ra rằng nếu $f : X \to \mathbf{R}$ liên tục còn $A \subset X$ là liên thông và $c, d \in f(A), c < d$ thì với mọi $\xi \in (c, d)$ đều tồn tại $x \in A$ sao cho $f(x) = \xi$. Điều này là mở rộng của định lí về giá trị trung gian của hàm liên tục trên một khoảng trong $\mathbf{R}$ và cũng cho ta thấy được bản chất bên trong của định lí giá trị trung gian đã biết.

MATH-EDUCARE

B. Bài tập

§1. Khái niệm không gian mêtric, tập mở, tập đóng.

Bài 1.1. Cho (X, d) là một không gian mêtric. Với mỗi $x, y \in X$, đặt

$$\rho_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},$$
$$\rho_2(x,y) = \min(1, d(x,y)).$$

(a) Chứng tỏ rằng ρ_1, ρ_2 cũng là các mêtric trên X.

(b) $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset X$. Chứng tỏ rằng ba mệnh đề sau là tương đương:

(i) $(x_n)_n$ hội tụ đến x_0 trong (X, d),
(ii) $(x_n)_n$ hội tụ đến x_0 trong (X, ρ_1),
(iii) $(x_n)_n$ hội tụ đến x_0 trong (X, ρ_2).

Bài 1.2. Trên $\mathbf{R}^n$, ta đặt, với $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$,

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

$$d_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|.$$

(a) Chứng tỏ rằng d_1, d_∞ là những mêtric trên $\mathbf{R}^n$.

(b) Hãy xác định hình cầu $\overline{B}((0,0),1)$ trong các không gian $(\mathbf{R}^2, d_1)$, $(\mathbf{R}^2, d_\infty)$.

Bài 1.3. Cho X là một không gian mêtric compact. Gọi $C(X)$ là tập tất cả các hàm số liên tục trên X. Trên $C(X)$ ta

WWW.MATHEDUCARE.COM

đặt

$$\rho(f,g) = \max_{x\in X}|f(x) - g(x)|,\ f,g \in C(X).$$

Chứng tỏ rằng ρ là một mêtric trên $C(X)$.

Bài 1.4. Cho (X,d) là một không gian mêtric, $A \subset X$. Chứng tỏ rằng

(a) $\overline{A} = \{x \in X \mid d(x,A) = 0\}$,

(b) A đóng khi và chỉ khi $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid d(x,A) < \frac{1}{n}\right\}$.

Từ đó suy ra rằng một tập đóng trong X là tập dạng G_δ và một tập mở là một tập dạng F_σ.

(c) Giả sử ρ cũng là một mêtric trên X. Hãy chứng tỏ rằng ρ tương đương tôpô với d khi và chỉ khi mọi $x \in X, A \subset X$,

$$d(x,A) = 0 \Leftrightarrow \rho(x,A) = 0. \qquad (*)$$

Bài 1.5. Xét hàm: $\rho : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ xác định bởi, với $x, y \in \mathbf{R}$,

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 + |x-y|, & \text{nếu có một và chỉ một} \\ & \text{trong các số } x, y \text{ dương,} \\ |x-y| & \text{các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

(a) Chứng tỏ rằng ρ là một mêtric trên $\mathbf{R}$.

(b) ρ có tương đương tôpô với khoảng cách thông thường trên $\mathbf{R}$, $d(x,y) = |x-y|$, không ?

Bài 1.6. Giả sử A, B là các tập con của không gian mêtric (X,d). Chứng tỏ rằng

(a) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}A \cap \text{int}B$,

(b) $\text{int}A \cup \text{int}B \subset \text{int}(A \cup B)$,

(c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(d) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$,

(e) Nếu B mở thì $\overline{A} \cap B \subset \overline{A \cap B}$.

Bài 1.7. Cho (X, d) là một không gian mêtric, A, B là hai tập đóng trong X sao cho $A \cap B = \emptyset$, $x_0 \notin A$. Gọi

$$G := \{x \in X \mid d(x, A) < d(x, B)\}.$$

Chứng tỏ rằng

(a) $d(x_0, A) > 0$,

(b) G là mở trong X, $A \subset G$ và $\overline{G} \cap B = \emptyset$. Từ đây suy ra rằng tồn tại các tập mở U và V trong X sao cho $A \subset U, B \subset V$ mà $U \cap V = \emptyset$.

Bài 1.8. Trong tập $\mathbf{N}$ các số tự nhiên ta đặt, mọi $m, n \in \mathbf{N}$,

$$d(m, n) := \begin{cases} 0 & \text{nếu } m = n \\ 1 + \frac{1}{m+n} & \text{nếu } m \neq n. \end{cases}$$

(a) Chứng minh d là một mêtric trên $\mathbf{N}$.

(b) Chứng minh $(\mathbf{N}, d)$ là một không gian mêtric đủ.

(c) Trong $(\mathbf{N}, d)$ hãy xác định các hình cầu đóng $\overline{b}_n := \overline{B}(n, 1 + \frac{1}{2n})$, $n \in \mathbf{N}$. Chứng tỏ rằng $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n = \emptyset$.

Bài 1.9. Trong không gian $C_{[0,1]}$ (với mêtric "max") xét các tập:

$$M_0 := \{x \in C_{[0,1]} \mid x(t) < x_0(t), \text{ mọi } t \in [0, 1]\}$$
$$M_1 := \{x \in C_{[0,1]} \mid x(t) \leq x_0(t), \text{ mọi } t \in [0, 1]\}$$

trong đó x_0 là một phần tử cho trước trong $C_{[0,1]}$.

(a) Chứng minh M_0 là mở và M_1 là đóng trong $C[0,1]$. Từ đó suy ra rằng nếu $A, B \in \mathbf{R}, A < B$ thì tập

$$M_2 := \{x \in C_{[0,1]} \mid A < x(t) < B, t \in [0,1]\}$$

là mở còn $M_3 := \{x \in C_{[0,1]} \mid A \leq x(t) \leq B, \forall t \in [0,1]\}$ là đóng trong $C_{[0,1]}$.

(b) Xét

$$M_4 := \{x \in C_{[0,1]} \mid 0 \leq x(t) \leq 1, t \in [0,1], x \text{ đơn ánh}\}$$

$$M_5 := \{x \in C_{[0,1]} \mid x : [0,1] \to [0,1]. \ x \text{ toàn ánh}\},$$

M_4, M_5 có là các tập đóng không?

§2. Ánh xạ liên tục.

Bài 2.1. Giả sử X, Y là các không gian mêtric và $f: X \to Y$ là một ánh xạ liên tục đều. Chứng minh

(a) Nếu $(x_n)_n$ là dãy Cauchy trong X thì $(f(x_n))_n$ là dãy Cauchy trong Y;

(b) Nếu A là một tập hoàn toàn bị chặn trong X thì $f(A)$ là tập hoàn toàn bị chặn trong Y.

Bài 2.2. Cho f và g là hai ánh xạ liên tục từ không gian mêtric X vào không gian mêtric Y. Chứng minh rằng hàm số $h: X \to \mathbf{R}$ cho bởi $h(x) = d(f(x), g(x))$ liên tục trên X. Suy ra rằng tập hợp $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ là đóng trong X.

Bài 2.3. Cho (X, d) là một không gian mêtric và A là một tập con không rỗng của X.

(a) Chứng minh rằng hàm số

$$d(., A): X \to \mathbf{R}, \ x \mapsto d(x, A)$$

là liên tục đều trên X.

(b) Với mọi $\alpha \in \mathbf{R}$, tập hợp $\{x \in X \mid d(x, A) < \alpha\}$ là tập mở còn $\{x \in X \mid d(x, A) \leq \alpha\}$ là tập đóng.

(c) Nếu B cũng là tập không rỗng của X thì tập hợp $\{x \in X \mid d(x, A) < d(x, B)\}$ là tập mở. Từ đây suy ra rằng nếu A và B là hai tập đóng không rỗng rời nhau của X thì tồn tại các tập mở U, V trong X mà U chứa A và V chứa B và sao cho $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$.

Bài 2.4. Giả sử $\varphi \in C_{[0,1]}$, $\varphi \not\equiv 0$ và f: $C_{[0,1]} \to \mathbf{R}$ là hàm xác định bởi

$$f(x) := \int_0^1 \varphi(t)x(t)dt, \ x \in C_{[0,1]}.$$

Chứng tỏ rằng tồn tại $M > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| \leq M.d(x, y), \quad \text{với mọi } x, y \in C_{[0,1]}.$$

Từ đây suy ra f liên tục đều trên $C_{[0,1]}$.

Bài 2.5. Giả sử $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là hàm khả vi liên tục và p là điểm bất động của f với $|f'(p)| < 1$. Chứng minh rằng tồn tại một lân cận U của p sao cho $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p$ với mọi $x \in U$. Ở đây $f^n(x) = f(f(f(\ldots(f(x))\ldots)))$ (phép hợp được thực hiện n lần).

Bài 2.6. Giả sử $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là hàm khả vi liên tục và p là điểm bất động của f với $|f'(p)| > 1$. Chứng minh rằng tồn tại một khoảng mở U của p sao cho với mọi $x \in U \setminus \{p\}$, tồn tại số tự nhiên k thoả mãn $f^k(x) \notin U$.

Bài 2.7. Cho f là một hàm số xác định trên không gian mêtric X. Chứng minh rằng f liên tục trên X khi và chỉ khi với mọi $a, b \in \mathbf{R}$, các tập hợp $f^{-1}((-\infty, b))$ và $f^{-1}((a, +\infty))$ là mở trong X.

WWW.MATHEDUCARE.COM

Bài 2.8. Gọi

$$M = \{x \in C_{[0,1]} \mid x(1) = 1,\ 0 \leq x(t) \leq 1,\ \forall t \in [0,1]\}.$$

(a) Chứng minh rằng M là tập đóng, không rỗng và bị chặn trong không gian mêtric $C_{[0,1]}$ với mêtric "max".

(b) Xét $f\colon C_{[0,1]} \to \mathbf{R}, f(x) = \int_0^1 x^2(t)dt$. Chứng minh f liên tục trên M nhưng f không đạt được giá trị nhỏ nhất trên M. Từ đó suy ra M không phải là tập compact trong $C_{[0,1]}$.

Bài 2.9. Cho X, Y, Z là ba không gian mêtric và $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ là các ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng nếu f toàn ánh và $g \circ f$ là phép đồng phôi từ X lên Z thì f, g là các phép đồng phôi.

Bài 2.10. Cho X là một không gian mêtric và $f\colon X \to \mathbf{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$. Chứng minh rằng f liên tục khi và chỉ khi các hàm thành phần f_i liên tục, $1 \leq i \leq n$ (trên $\mathbf{R}^n$ xét mêtric thông thường).

Bài 2.11. Cho các hàm số $f_i\colon C_{[0,1]} \to \mathbf{R}, 1 \leq i \leq 3$ xác định như sau:

$$f_1(x) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|,$$

$f_2(x) = x(a)$ trong đó a là một số cố định thuộc $[0,1]$,

$f_3(x) = \varphi(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n))$ trong đó $t_i \in [0,1]$,

$1 \leq i \leq n$ là những số cố định, còn φ là hàm liên tục trên $\mathbf{R}^n$. Chứng minh các hàm số này liên tục.

Bài 2.12. Cho A và B là hai tập đóng không rỗng của không gian mêtric X sao cho $A \cap B = \emptyset$. Chứng minh rằng tồn tại một ánh xạ liên tục $f\colon X \to [0,1]$ sao cho $f(x) = 0$ với mọi $x \in A$ và $f(x) = 1$ với mọi $x \in B$.

Bài 2.13. Cho f là ánh xạ từ không gian mêtric X vào không gian mêtric Y. Tập hợp

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in X,\ y = f(x)\}$$

được gọi là đồ thị của ánh xạ f.

(a) Chứng minh rằng nếu f liên tục thì đồ thị của nó là tập đóng trong không gian mêtric tích $X \times Y$.

(b) Chứng minh rằng nếu Y là không gian mêtric compact và $G(f)$ là tập đóng trong $X \times Y$ thì f liên tục.

Bài 2.14. Xét ánh xạ f: $C_{[0,1]} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x(1)$.

(a) Chứng minh rằng f liên tục đều trên $(C_{[0,1]}, d)$ với d là mêtric "max".

(b) Chứng minh rằng f không liên tục trên $(C_{[0,1]}, \rho)$ với ρ là mêtric xác định bởi: $\rho(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|dt$.

Bài 2.15. Cho f: $(0, 1) \to \mathbf{R}$ là hàm liên tục. Với mọi $x, y \in (0, 1)$ ta đặt

$$d(x, y) := \max\{|f(x) - f(y)|, |x - y|\}.$$

(a) Chứng tỏ rằng d là mêtric tương đương tôpô với mêtric cảm sinh trên $(0, 1)$ từ mêtric thông thường của $\mathbf{R}$.

(b) Chứng minh f liên tục đều trên $((0, 1), d)$.

Bài 2.16. Cho φ: $[0, 1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là một hàm liên tục. Chứng minh rằng hàm F: $C_{[0,1]} \to \mathbf{R}$ cho bởi $F(x) := \int_0^1 \varphi(t, x(t))$, $x \in C_{[0,1]}$ là liên tục.

§3. Bài tập không gian mêtric đủ.

Bài 3.1. Cho $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là một ánh xạ liên tục.

(a) Với điều kiện nào thì $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$, $x, y \in \mathbf{R}$ là một mêtric trên $\mathbf{R}$?

(b) Với điều kiện nào thì $(\mathbf{R}, \rho)$ với ρ như trên là một không gian mêtric đủ?

Bài 3.2. Gọi X là tập hợp tất cả các hàm liên tục trên $\mathbf{R}$ và có tính chất $f(x) = 0$ ngoài một đoạn đóng nào đó (phụ thuộc vào f). Đặt

$$d(f,g) = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|; \quad f, g \in X.$$

(a) Chứng minh d là một mêtric trên X.

(b) Chứng minh (X,d) là một không gian đủ.

Bài 3.3. (Nguyên lí bị chặn đều) Giả sử $\mathcal{F}$ là một họ hàm liên tục trên $\mathbf{R}$ và có tính chất

$$\forall x \in \mathbf{R}, \exists\, M_x > 0 : \ \forall f \in \mathcal{F} : |f(x)| < M_x.$$

Chứng minh tồn tại một tập mở $U \subsetneq \mathbf{R}$, $U \neq \emptyset$, $\exists M > 0$ sao cho $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in U$, $\forall f \in \mathcal{F}$.

Bai 3.4. Trên tập số thực ta đặt ..

$$d_1(x,y) = |\ \text{arctg}\ x - \ \text{arctg}\ y|$$

và

$$d_2(x,y) = |e^x - e^y|.$$

Chứng minh

(a) d_1, d_2 là các mêtric trên $\mathbf{R}$,

(b) $(\mathbf{R}, d_1)$ $(\mathbf{R}, d_2)$ là các không gian mêtric không đầy đủ.

Bài 3.5. Cho X là một không gian mêtric đầy đủ và

$f : X \to X$ là một ánh xạ co với hằng số co $\alpha \in [0, 1)$. Giả sử tồn tại $x_0 \in X$, $r > 0$ sao cho $d(f(x_0), x_0) < r(1 - \alpha)$. Chứng minh rằng khi đó tồn tại duy nhất $x^* \in B(x_0.r)$ sao cho $f(x^*) = x^*$.

Bài 3.6. Giả sử $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là một ánh xạ khả vi sao cho $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < 1$. Chứng tỏ rằng f có duy nhất một điểm bất động trên $\mathbf{R}$.

Bài 3.7. Trên $\mathbf{R}^n$ ta xét mêtric thông thường. Giả sử $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ là một song ánh sao cho có $k > 0$, $k \neq 1$ để

$$d(f(x), f(y)) = k.d(x, y), \text{ mọi } x, y \in \mathbf{R}^n.$$

Chứng tỏ rằng f có duy nhất một điểm bất động.

Bài 3.8. Cho $\varphi \in C_{[a,b]}$, $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbf{R}$ là một ánh xạ liên tục. Giả sử λ là số thực.

(a) Giả sử λ thoả mãn $|\lambda| \leq \frac{1}{M.(b-a)}$, trong đó $M > 0$ là số thực mà $|K(t, s)| \leq M$ với mọi $(t, s) \in [a, b] \times [a, b]$. Gọi

$$\Phi : C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$$

là hàm số xác định bởi

$$\Phi(x)(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds + \varphi(t).$$

Chứng minh rằng Φ là ánh xạ co. Từ đó suy ra rằng phương trình tích phân

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds + \varphi(t)$$

có duy nhất một nghiệm x^* thuộc $C_{[a,b]}$.

MATH-EDUCARE

(b) Xét phương trình tích phân (ẩn $x \in C_{[a,b]}$)

$$x(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)x(s)ds + \varphi(t),\ t \in [a,b].$$

Chứng minh rằng với mọi $\lambda \in \mathbf{R}$, phương trình trên có duy nhất một nghiệm x^* thuộc $C_{[a,b]}$.

Bài 3.9. Chứng minh rằng tập số hữu tỉ $\mathbf{Q}$ không phải là tập thuộc loại G_δ trong $\mathbf{R}$.

Bài 3.10. Cho X là một tập hợp không rỗng bất kỳ. Gọi $B(X)$ là không gian tất cả các hàm số thực bị chặn trên X với mêtric $d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$. Giả sử $g : X \times X \to \mathbf{R}$ là một hàm số bị chặn và $\alpha \in [0,1)$. Xét ánh xạ $\varphi : B(X) \to B(X)$ cho bởi

$$(\varphi(u))(x) = \sup_{y \in X} \{(1-\alpha)\cdot g(x,y) + \alpha \cdot u(y)\},\ x \in X,\ u \in B(X).$$

Chứng minh rằng φ là một ánh xạ co với hệ số co α và hình cầu đóng B tâm 0 bán kính $\beta := \sup_{(x,y) \in X \times X} |g(x,y)|$ là bất biến đối với φ (nghĩa là $\varphi(B) \subset B$). Do đó φ có điểm bất động thuộc hình cầu này.

Bài 3.11. Cho X là một không gian mêtric đầy đủ và φ là một ánh xạ liên tục và bị chặn từ $X \times \mathbf{R}$ vào $\mathbf{R}$ sao cho với mọi $x \in X$ và với mọi $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ ta luôn có

$$|\varphi(x,y_1) - \varphi(x,y_2)| \le \lambda |y_1 - y_2|$$

trong đó λ là một hằng số cố định thuộc $(0,1)$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một ánh xạ liên tục u từ X vào $\mathbf{R}$ sao cho

$$u(x) = \varphi(x, u(x)) \text{ với mọi } x \in X. \qquad (1)$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

Bài 3.12. (Nguyên lí bị chặn đều) Cho X là một không gian mêtric đầy đủ và $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một họ các hàm nửa liên tục dưới trên X sao cho $f(x) := \sup_{\alpha\in I} f_\alpha(x) < \infty$ với mỗi $x \in X$.

(a) Chứng minh rằng f là hàm nửa liên tục dưới trên X.

(b) Chứng minh rằng tồn tại tập hợp mở $U \subset X$ và số thực $K > 0$ sao cho $f_\alpha(x) \leq K$ với mọi $x \in U$ và mọi $\alpha \in I$.

Ghi chú. Hàm $g : X \to \mathbf{R}$ gọi là nửa liên tục dưới trên X nếu với mọi $\alpha \in \mathbf{R}$, tập hợp $\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ là tập đóng trong X.

Bài 3.13. Cho X là một không gian mêtric đủ và $A : X \to X$ là một ánh xạ liên tục sao cho có $n \in \mathbf{N}$ để $A^n := A \circ A \circ A \circ \cdots \circ A$ (n lần) là một ánh xạ co. Chứng tỏ rằng A có duy nhất một điểm bất động.

§4. Không gian compact - Không gian liên thông.

Bài 4.1. Cho hai không gian mêtric X, Y và song ánh $f : X \to Y$. Giả sử tồn tại các số dương M, m sao cho

$$md(x, x') \leq d(f(x), f(x')) \leq Md(x, x').$$

(a) Chứng minh rằng X là không gian đủ khi và chỉ khi Y là không gian đủ.

(b) Chứng minh rằng X là không gian compact khi và chỉ khi Y là không gian compact.

Bài 4.2.

Cho X là không gian compact và $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset \cdots$ là dãy các tập mở trong X sao cho $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Chứng minh rằng tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $G_{n_0} = X$.

Bài 4.3. Cho $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục.

(a) Chứng minh rằng nếu $(x_n)_n$ là dãy Cauchy trong $[a, b]$ thì $(f(x_n))_n$ là dãy Cauchy trong $\mathbf{R}$.

(b) Chứng minh rằng nếu A là tập đóng trong $[a, b]$ thì $f(A)$ là tập đóng trong $\mathbf{R}$.

(c) Nếu B là tập mở trong $[a, b]$ thì $f(A)$ có là tập mở trong $\mathbf{R}$ không ?

Bài 4.4. Cho X là không gian compact và $(x_n)_n \subset X$. Đặt

$$F_n = \{x_k \mid k \geq n\},\ n \in \mathbf{N}.$$

Chứng minh rằng

(a) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n \neq \emptyset$. Nếu X chỉ là không gian đủ (mà không compact) thì kết luận còn đúng không ?

(b) $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n$ khi và chỉ khi tồn tại $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ sao cho $x_{n_k} \to x$ khi $k \to \infty$.

Bài 4.5. Chứng minh rằng nếu $(A_n)_n$ là một dãy các tập đóng, bị chặn trong $\mathbf{R}$ sao cho giao của một số hữu hạn bất kì các tập của họ này đều không rỗng thì $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Bài 4.6. Chứng minh rằng hợp một số hữu hạn các tập compact là một tập compact.

Bài 4.7. Cho X, Y là hai không gian mêtric. Chứng minh rằng

(a) Nếu $x_n \to x_0$ trong X (khi $n \to \infty$) thì tập hợp $K = \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{x_0\}$ là tập compact,

(b) $f : X \to Y$ liên tục khi và chỉ khi f liên tục trên mỗi tập compact của X.

MATH-EDUCARE

Bài 4.8. Cho E, F là các tập không rỗng, E compact và F đóng trong không gian mêtric X. Ta định nghĩa

$$d(E,F) = \inf_{x\in E, y\in F} d(x,y).$$

Chứng minh rằng

(a) Tồn tại $x_0 \in E$ sao cho $d(x_0,F) = d(E,F)$,

(b) Tồn tại $x_0, y_0 \in E$ sao cho $d(x_0,y_0) = \delta(E) := \sup_{a,b\in E} d(a,b)$,

(c) Nếu $E \cap F = \emptyset$ thì tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $d(x,y) \geq \alpha$, mọi $x \in E$, $y \in F$.

Bài 4.9. Giả sử X là không gian compact và $f : X \to \mathbf{R}$ một hàm số sao cho $\{x \in X | f(x) \geq t\}$ là tập đóng với mọi $t \in \mathbf{R}$. Giả sử $\sup_{x\in X} f(x) < +\infty$. Hãy chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in X$ sao cho

$$f(x_0) = \sup_{x\in X} f(x).$$

Bài 4.10. Chứng minh rằng $[0,1)$ không đồng phôi với $(0,1)$.

Bài 4.11. Cho A là một tập bị chặn và không đóng của $\mathbf{R}$. Hãy xây dựng một phủ mở của A sao cho không có họ con hữu hạn nào của nó phủ A.

Bài 4.12. Cho X là một không gian mêtric compact và $f : X \to X$ là một ánh xạ liên tục. Giả sử $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$ là một dãy giảm các tập đóng không rỗng của X. Chứng minh rằng $f(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n)$.

Bài 4.13. Cho X là một không gian mêtric compact và A là một tập con không rỗng của X. Chứng minh rằng khi đó

WWW.MATHEDUCARE.COM

tồn tại $u \in X$ sao cho $d(u, A) \geq d(x, A)$ với mọi $x \in X$.

Bài 4.14. Cho X là một không gian mêtric compact và $f : X \to X$ là một ánh xạ thỏa mãn điều kiện

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \text{ mọi } x, y \in X, x \neq y.$$

Gọi $g : X \to \mathbf{R}$ là ánh xạ xác định bởi $g(x) = d(x, f(x))$, $x \in X$.

(a) Gọi $\alpha = \inf_{x \in X} g(x)$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $g(x_0) = \alpha$.

(b) Chứng tỏ rằng $\alpha = 0$ và x_0 (tồn tại trong câu (a)) là điểm bất động duy nhất của f.

§5. Định lí Weierstrass và Định lí Ascoli.

Bài 5.1. Cho $\mathcal{A}$ là một tập hợp đồng liên tục trên $[a, b]$ của không gian $C_{[a,b]}$. Giả sử rằng tồn tại $x_0 \in [a, b]$ sao cho tập hợp $\{f(x_0) | f \in \mathcal{A}\}$ bị chặn. Chứng minh rằng $\mathcal{A}$ bị chặn điểm trên $[a, b]$ và do đó, $\mathcal{A}$ là tập hợp compact tương đối trong $C_{[a,b]}$.

Bài 5.2. Cho X là một không gian mêtric compact và $(f_n)_n$ là một dãy đồng liên tục của $\mathcal{C}(X)$. Giả sử tồn tại một hàm $f \in \mathcal{C}(X)$ và một tập trù mật A của X sao cho $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ với mọi $x \in A$. Chứng minh rằng $(f_n)_n$ hội tụ tới f trong $\mathcal{C}(X)$.

Chú ý. $\mathcal{C}(X)$ là không gian các hàm số liên tục trên X với mêtric "max".

Bài 5.3. Giả sử $\mathcal{A} \subset C_{[a,b]}$ là một tập không rỗng có tính chất: với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại $\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_k \in C_{[a,b]}$ sao cho $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(\varphi_i, \epsilon)$. Chứng tỏ rằng

MATH-EDUCARE

(a) $\mathcal{A}$ bị chặn đều trên $[a, b]$.

(b) $\mathcal{A}$ đồng liên tục đều trên $[a, b]$.

Bài 5.4. Cho $\mathcal{A}$ là tập hợp con đồng liên tục của $C_{[a,b]}$. Chứng minh rằng $\mathcal{A}$ là đồng liên tục đều.

Bài 5.5. Cho $X = [0,1] \times [0,1]$ và $f \in C(X)$. Với $0 \leq y \leq 1$ ta định nghĩa $f_y : [0,1] \to \mathbf{R}$ bởi $f_y(x) = f(x,y)$. Chứng minh rằng tập hợp $F = \{f_y \mid 0 \leq y \leq 1\}$ là đồng liên tục đều trên $[0,1]$.

Bài 5.6. Cho $(f_n)_n \subset C_{[a,b]}$ và $(f_n)_n$ bị chặn đều trên $[a, b]$. Chứng minh rằng dãy các hàm $(g_n)_n$ xác định bởi $g_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ với mỗi $x \in [a, b]$, $n \in \mathbf{N}$, có một dãy con hội tụ đều trên $[a, b]$.

Bài 5.7. Giả sử f là một hàm liên tục trên $[0,1]$ sao cho $\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$ với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$. Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \in [0,1]$.

Bài 5.8. Cho α, β, γ là các số dương và $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Ta gọi F là tập hợp các hàm số liên tục $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ sao cho $|f(a)| \leq \gamma$ và $|f(x) - f(y)| \leq \beta|x - y|^\alpha$ với mọi $x, y \in [a, b]$. Chứng minh F là tập compact của $C_{[a,b]}$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

C. Bài tập ôn.

Bài O1. Cho E là một tập không rỗng và d: $E \times E \to [0, +\infty)$ là một ánh xạ thoả mãn các điều kiện sau: với mọi $x, y, z \in E$,

(α) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(β) $d(x, y) = d(y, x)$,

(γ) $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$.

(a) Chứng tỏ rằng d là một mêtric trên E.

(b) Giả sử $x, y, z \in E$ sao cho $d(x, y) \neq d(y, z)$. Chứng tỏ rằng

$$d(x, z) = \max\{d(x, y), d(y, z)\}.$$

(c) Giả sử $x \in E$ và $r > 0$. Chứng minh các khẳng định sau:

(i) Hình cầu mở $B(x, r)$ là tập đóng trong (E, d) và với mọi $y \in B(x, r)$, $\overline{B}(y, r) = B(x, r)$.

(ii) Hình cầu đóng $\overline{B}(x, r)$ là tập mở trong (E, d) và với mọi $y \in \overline{B}(x, r)$, $\overline{B}(y, r) = \overline{B}(x, r)$.

(d) Dãy $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset (E, d)$ là dãy Cauchy khi và chỉ khi

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Bài O2. Giả sử X, Y là các không gian mêtric và f: $X \to Y$ là một ánh xạ. Chứng tỏ f liên tục khi và chỉ khi với mọi $B \subset Y$, $f^{-1}(\text{int}B) \subset \text{int}f^{-1}(B)$.

Bài O3. Giả sử Φ: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ là một hàm số đơn điệu tăng thoả mãn $\Phi(0) = 0, \Phi(u) > 0$ khi $u > 0$ và $\Phi(u+v) \leq \Phi(u) + \Phi(v)$ mọi $u, v \in [0, +\infty)$. Giả sử thêm rằng

(X, d) là một không gian mêtric. Đặt, với mỗi $x, y \in X$,

$$d_1(x, y) = \Phi(d(x, y))$$

(a) Chứng tỏ rằng d_1 là một mêtric trên X.

(b) Chứng tỏ rằng nếu Φ là hàm liên tục tại 0 thì ánh xạ id : $(X, d) \to (X, d_1)$ và cả ánh xạ ngược của nó cũng liên tục đều . Từ đó suy ra các dãy Cauchy trong (X, d) và (X, d_1) trùng nhau.

Bài O4. Cho X là tập khác $\emptyset$. Với $x, y \in X$ ta đặt

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = y, \\ 1 & \text{nếu } x \neq y. \end{cases}$$

(a) Chứng tỏ d là một mêtric trên X và mọi tập trong X đều là tập mở.

(b) Cho $(x_n)_n \subset X$. Chứng tỏ rằng $x_n \to x_0$ khi và chỉ khi tồn tại $n_0 > 0$ sao cho nếu $n \geq n_0$ thì $x_n = x_0$.

(c) Chứng tỏ rằng trong không gian (X, d) có thể xảy ra:

(i) $\overline{B(x_0, r)} \neq \overline{B}(x_0, r)$ với $x_0 \in X$ và $r > 0$ nào đó,

(ii) $B(x_0, r) \subset B(x_0, r')$ với $0 < r' < r$,

(d) Một tập $A \subset X$ là compact khi và chỉ khi A là tập hữu hạn.

Bài O5. Cho các số thực $t_1, t_2, ..., t_n \in [0, 1]$ và $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbf{R}$. Chứng minh rằng ánh xạ f: $C_{[0,1]} \to \mathbf{R}$ cho bởi $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x(t_i)$ là ánh xạ liên tục.

Bài O6. Cho X là không gian mêtric, $p \in X$ và U là một lân cận mở của p. Chứng minh rằng tồn tại một ánh xạ

MATH-EDUCARE

liên tục f: $X \to [0,1]$ sao cho $f(p) = 0$ và $f(X \setminus U) = 1$.

Bài O7. Giả sử f: $X \to X$ là một ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng X đồng phôi với $G(f)$.

Chú ý. $G(f) \subset X \times X$. Mêtric trên $X \times X$ (cũng được kí hiệu là d) xác định bởi

$$d((x,y),(z,t)) = d(x,z) + d(y,t).$$

Bài O8. Trên $\mathbf{R}$ ta xét mêtric thông thường $d(x,y) = |x-y|$, $x, y \in \mathbf{R}$. Giả sử f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là một hàm tăng nghiêm ngặt. Đặt

$$\delta(x,y) = |f(x) - f(y)|, \text{với mọi } x, y \in \mathbf{R}.$$

(a) Chứng tỏ δ là một mêtric trên $\mathbf{R}$.

(b) Chứng tỏ rằng các dãy Cauchy trong hai không gian $(\mathbf{R}, d)$ và $(\mathbf{R}, \delta)$ là trùng nhau tuy nhiên ánh xạ đồng nhất id: $(\mathbf{R}, d) \to (\mathbf{R}, \delta)$ chỉ liên tục đều nếu f liên tục đều.

(c) Tìm một điều kiện cần và đủ mà hàm f phải thỏa mãn để các mêtric d và δ là tương đương tôpô.

(d) Tìm một điều kiện cần và đủ mà hàm f phải thỏa mãn để $(\mathbf{R}, \delta)$ là đầy đủ.

Bài O9. (a) Giả sử $(X_1, d_1), ..., (X_n, d_n)$ là các không gian mêtric ($n \in \mathbf{N}$). Gọi $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ và xét các hàm ρ_1, ρ_2, ρ_3: $X \times X \to \mathbf{R}$ xác định bởi: $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$,

$$\begin{aligned}
\rho_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i), \\
\rho_2(x,y) &= \max\{d_i(x_i,y_i), i = 1, ..., n\} \text{ và} \\
\rho_3(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

Chứng minh các khẳng định sau:

(i) ρ_1, ρ_2, ρ_3 là các mêtric trên X.

(ii) Sự hội tụ trong X theo mỗi mê tric ρ_1, ρ_2, ρ_3 là sự hội tụ theo từng toạ độ.

(b) Cho $((X_i, d_i))_i$ là một họ những không gian mêtric và $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Với mỗi $x = (x_i)_{i \in \mathbf{N}}, y = (y_i)_{i \in \mathbf{N}} \in X$, ta đặt

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}.$$

(i) Chứng tỏ rằng d là một mêtric trên X.

(ii) Khảo sát sự hội tụ trong (X, d).

Chú ý: Theo định nghĩa,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{\infty} X_i &:= \left\{ x\colon N \to \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \mid x(i) \in X_i, \forall i \in \mathbf{N} \right\} \\ &= \{(x_i)_{i \in \mathbf{N}} \mid x_i \in X_i, \ \forall i \in \mathbf{N}\}. \end{aligned}$$

Bài O10. Chứng minh rằng hàm số $h\colon \mathbf{R} \to (-1,1)$ cho bởi $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$ là một phép đồng phôi.

Bài O11. Cho X là một không gian mêtric đầy đủ, $B(x_0, \beta)$ là hình cầu mở tâm x_0 bán kính β và $f : B(x_0, \beta) \to X$ là một ánh xạ co, nghĩa là có $\lambda \in (0,1)$ sao cho

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y) \quad \text{với mọi } x, y \in B(x_0, \beta).$$

Giả sử thêm rằng $d(f(x_0), x_0) < \beta(1-\lambda)$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất $x^* \in B(x_0, \beta)$ mà $f(x^*) = x^*$.

Bài O12. Cho X, Y là các không gian mêtric và $f\colon X \to$

Y là một ánh xạ.

(a) Giả sử A là tập mở trong X. Chứng minh rằng $f_{|A}$ liên tục tại $x \in A$ khi và chỉ khi f liên tục tại x.

(b) Giả sử A và B là hai tập con của X sao cho $A \cup B = X$. Chứng minh rằng nếu các ánh xạ $f_{|A}$ và $f_{|B}$ liên tục tại $x_0 \in A \cap B$ thì f liên tục tại x_0.

(c) Giả sử A và B là hai tập cùng đóng (hoặc cùng mở) của X sao cho $A \cup B = X$. Chứng minh rằng nếu $f_{|A}$ và $f_{|B}$ liên tục thì f liên tục.

Bài O13. Gọi C^1 là không gian các hàm khả vi liên tục trên $[0, 1]$ với mêtric

$$d(x, y) = \max_{0 \le t \le 1} \{|x(t) - y(t)| + |x'(t) - y'(t)|\}.$$

Chứng minh các ánh xạ f_i: $C^1 \to \mathbf{R}$, $1 \le i \le 3$ cho bởi, $x \in C_1$,

$f_1(x) = x'(t_0)$ trong đó t_0 là một điểm cố định thuộc $[0, 1]$,

$f_2(x) = \int_0^1 \sqrt{1 + (x'(t))^2}dt$,

$f_3(x) = \int_0^1 |x'(t)|dt$

là những ánh xạ liên tục.

Bài O14. Xét hệ phương trình n ẩn:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, \ i = 1, 2, ..., n, \qquad (1)$$

trong đó $A = (a_{ij})$, $b = (b_1, b_2, ..., b_n)^T$ cho sẵn. Chứng tỏ rằng hệ (1) có duy nhất nghiệm $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ nếu một trong các điều kiện sau thoả mãn:

(i) $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \alpha < 1,\ i = 1, 2, ..., n;$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \alpha < 1,\ j = 1, 2, ...n;$

(iii) $\sum_{i}\sum_{j} a_{ij}^2 \leq \alpha < 1.$

Bài O15. Giả sử $\varphi \in C_{[a,b]}$ và $K : [a,b] \times [a,b] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là ánh xạ liên tục và tồn tại $M > 0$ sao cho $|K(t,s,\xi) - K(t,s,\xi')| \leq M|\xi - \xi'|$ với mọi $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$. Chứng minh rằng phương trình tích phân ($\lambda \in \mathbf{R}$)

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t,s,x(s))ds + \varphi(t)$$

có duy nhất một nghiệm trong $C[a,b]$ nếu $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$.

Bài O16. Cho A là tập con của không gian mêtric X. Chứng minh rằng tập hợp $A \cup \text{int}\,(X \setminus A)$ là trù mật trong X.

Bài O17. Cho (X,d) là một không gian mêtric, $A \subset X, x_0 \in X$ và $x_0 \notin A$.

(a) Giả sử A đóng. Chứng tỏ $d(x_0, A) > 0$.

(b) Giả sử A compact, khác $\emptyset$. Chứng tỏ rằng tồn tại $y_0 \in A$ để

$$d(x_0, A) = d(x_0, y_0).$$

(c) Giả sử $X = \mathbf{R}^n$ với mêtric Euclide và A đóng khác $\emptyset$ thì khẳng định ở câu (b) còn đúng.

(d) Tìm ví dụ chứng tỏ rằng phần tử y_0 tồn tại trong câu (b) có thể không duy nhất.

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

(e) Có thể xảy ra trường hợp $x_0 \in X$ (không gian mêtric nào đó), A đóng và $d(x_0, A) < d(x_0, y)$ mọi $y \in A$ không?

Bài O18. Cho (X, d) là một không gian mêtric. Gọi $B(X)$ (t.ư., $C(X)$) là tập hợp tất cả các hàm số thực bị chặn (t.ư., liên tục và bị chặn) trên X. Xét hàm $d : X \times X \to \mathbf{R}$ xác định bởi:

$$d(f.g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|, f, g \in B(X) \text{ (t.ư., } f, g \in C(X)).$$

(a) Chứng minh rằng d là một mêtric trên $B(X)$ (t.ư., $C(X)$) và $(B(X), d)$ (t.ư., $(C(X), d)$) là một không gian mêtric đầy đủ.

(b) Cho $a \in X$ là một phần tử cố định. Mỗi $x \in X$ ta xác định một hàm $f_x : X \to \mathbf{R}$ theo công thức:

$$f_x(y) := d(x, y) - d(y, a), \cdot y \in X.$$

Chứng minh rằng $f_x \in B(X)$, mọi $x \in X$.

(c) Xét ánh xạ $\theta : X \to B(X)$ xác định bởi

$$x \to \theta(x) := f_x.$$

Chứng minh rằng θ là một phép đẳng cự từ X lên một không gian con của $B(X)$. Từ đó suy ra rằng tồn tại một không gian đầy đủ $\hat{X}$ sao cho X đẳng cự với một không gian con U của $\hat{X}$ mà U trù mật trong $\hat{X}$ (nói cách khác, $\hat{X}$ là một đầy đủ hoá của X).

Bài O19. Cho X, Y là hai không gian mêtric và $f: X \to Y$ là một ánh xạ. Ta định nghĩa hàm dao động ω của f trên X như sau

$$\omega(x) = \inf \{\text{diam } F(U) \mid U \text{ là lân cận của } x\}.$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

(a) Chứng tỏ rằng f liên tục tại p khi và chỉ khi $\omega(p) = 0$.

(b) Chứng tỏ rằng với mỗi $\alpha \leq \infty$, tập hợp

$$\{x \in X \mid \omega(x) < \alpha\}$$

là mở trong X.

(c) Chứng tỏ rằng $\{p \in X \mid f$ liên tục tại $p\}$ là một tập dạng G_δ trong X.

(d)* Giả sử rằng tồn tại tập $D \subset X$ sao cho cả D và $D^c := X \setminus D$ trù mật trong X (chẳng hạn, $X = \mathbf{R}$ và $D = \mathbf{Q}$). Chứng minh rằng nếu G là một tập dạng G_δ của X thì tồn tại một hàm $f\colon X \to \mathbf{R}$ sao cho

$$\{p \in X \mid f \text{ liên tục tại } p\} = G.$$

Bài O20. Giả sử f là một hàm số liên tục trên một khoảng $I \subset \mathbf{R}$. Chứng minh rằng đồ thị $G(f)$ của nó là một tập liên thông trong $\mathbf{R}^2$.

Bài O21. Gọi E^n là không gian vectơ các đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng n. Cho $x_0, x_1, \ldots, x_n$ là $n+1$ số thực phân biệt.

(a) Chứng minh rằng hàm $d : E^n \times E^n \to \mathbf{R}$ cho bởi

$$d(P, Q) = \sum_{i=0}^{n} |P(x_i) - Q(x_i)|$$

là một mêtric trên E^n.

(b) Gọi F là song ánh tuyến tính từ $\mathbf{R}^{n+1}$ vào E^n, với $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $F(a)$ là đa thức $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$. Đặt

$$\rho(a, b) = d\big(F(a), F(b)\big), \quad a, b \in \mathbf{R}^{n+1}.$$

MATH-EDUCARE

Chứng minh ρ là một mêtric trên R^{n+1}. Bằng cách chọn $x_0, x^1, \ldots, x^n$ khác nhau ta sẽ được nhiều mêtric mới trên $\mathbf{R}^{n+1}$.

Bài O22. Cho B là một tập liên thông trong không gian mêtric X và $A \subset X$ là một tập bất kì. Chứng minh rằng nếu $A \cap B \neq \emptyset$ và $B \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ thì $B \cap \partial A \neq \emptyset$.

Chú ý. (Một điểm x_0 được gọi là *điểm biên* của tập A nếu mọi lân cận của x_0 đều có giao không rỗng với A và với $X \setminus A$. Tập hợp các điểm biên của A gọi là biên của A và kí hiệu ∂A).

Bài O23. Cho X là một không gian mêtric và $f : X \to \mathbf{R}$ là hàm số sao cho với mỗi $\alpha \in \mathbf{R}$, tập hợp

$$L_\alpha(f) = \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$$

là tập compact*. Chứng minh rằng f đạt được giá trị nhỏ nhất trên X.

Bài O24. Cho X là không gian compact và $f: X \to Y$ là ánh xạ liên tục.

(a) Chứng minh rằng nếu A là tập đóng trong X thì $f(A)$ đóng trong Y.

(b) Tìm thí dụ chc trường hợp A là tập mở trong X nhưng $f(A)$ không phải là tập mở trong Y.

Bài O25. Cho X là một không gian mêtric và $f : X \to X$ là một ánh xạ liên tục.

(a) Chứng minh rằng tập hợp tất cả các điểm bất động của f là một tập đóng.

(b) Chứng minh rằng nếu X compact và f không có điểm

*Hàm f như thế được gọi là *inf-compact* trên X.

WWW.MATHEDUCARE.COM

bất động thì tồn tại số $c > 0$ sao cho

$$d(f(x), x) \geq c, \text{ mọi } x \in X.$$

Bài O26. Cho L, X là không gian mêtric compact và $F : L \times X \to Y$ là một ánh xạ liên tục. Giả sử y_0 là một điểm cố định của Y.

(a) Chứng minh rằng

$$L_0 = \{\lambda \in L \mid \exists x \in X, F(\lambda, x) = y_0\}$$

là tập đóng của L.

(b) Giả sử rằng với mỗi $\lambda \in L_0$, ánh xạ $F_\lambda : X \to Y$ xác định bởi $F_\lambda(x) = F(\lambda, x), x \in X$ là song ánh. Chứng minh rằng nghiệm $x = \phi(\lambda)$ của phương trình $y_0 = F(\lambda, x)$ là liên tục trên L_0.

Bài O27. Cho A là một tập con compact của không gian mêtric X và U là một tập mở chứa A. Với $\epsilon > 0$, gọi

$$B(A, \epsilon) = \{x \in X | d(x, A) < \epsilon\}.$$

(a) Chứng minh rằng tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $B(A, \epsilon) \subset U$.

(b) Hãy cho một ví dụ chứng tỏ rằng kết luận ở câu (a) không còn đúng nếu A là tập đóng mà không compact.

Bài O28. Cho A là không gian mêtric gồm tất cả các hàm số liên tục từ $[0, 1]$ vào $[0, 1]$ với mêtric "max". Gọi $A_i = \{f \in A | f \text{ đơn ánh }\}$, $A_s = \{f \in A | f \text{ toàn ánh }\}$ và $A_b = \{f \in A | \text{ song ánh }\}$. Các khẳng định sau là đúng hay sai: (a) A_i là tập đóng; (b) A_s là tập đóng; (c) A_b là tập đóng; (d) A liên thông; (e) A compact ?

Bài O29. Cho (X, d) là một không gian mêtric và A, B

là các tập con không rỗng của X.

(a) Chứng minh $d(\overline{A}, \overline{B}) = d(A, \overline{B}) = d(\overline{A}, B) = d(A, B)$.

(b) Nếu A và B là các tập compact thì tồn tại các điểm $a \in A$ và $b \in B$ sao cho $d(a, b) = d(A, B)$.

(c) Nếu A đóng, B compact và $d(A, B) = 0$ thì $A \cap B \neq \emptyset$. Kết luận còn đúng không nếu B chỉ đóng mà không compact?

Bài O30. Cho (X, d) và (Y, ρ) là hai không gian mêtric và K là tập hợp compact của X.

(a) Chứng minh rằng nếu $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một phủ mở của K thì tồn tại số thực $r > 0$ sao cho với mọi $x \in K$, hình cầu mở $B(x, r)$ nằm trong ít nhất một trong các tập mở U_α.

(b) Giả sử $f : X \to Y$ là một ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in K, y \in X$ mà $d(x, y) < \delta$ ta đều có $\rho(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Bài O31. Cho X, Y là hai không gian mêtric và $f: X \to Y$ là một toàn ánh. Giả sử tồn tại hai số dương m và M sao cho

$$md(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq Md(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

(a) Chứng minh f là một phép đồng phôi.

(b) Chứng minh rằng nếu X là không gian đầy đủ thì Y cũng là không gian đầy đủ.

(c) Chứng minh rằng nếu Y là không gian compact thì X cũng là không gian compact.

Bài O32. Cho I là một khoảng không suy biến thành một điểm của $\mathbf{R}$. Chứng minh rằng không tồn tại một hàm số f liên tục trên I sao cho

(i) Với mọi $x \in I \cap \mathbf{Q}$, $f(x)$ thuộc $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$,

(ii) Với mọi $x \in I \setminus \mathbf{Q}$, $f(x)$ thuộc $\mathbf{Q}$.

Bài O33. Cho $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ là một ánh xạ liên tục, $x_0 \in \mathbf{R}^2$ và $r > 0$. Giả sử rằng tồn tại $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ sao cho $f(t_1) \in B(x_0, r)$ và $f(t_2) \notin \bar{B}(x_0, r)$. Chứng tỏ rằng $f(\mathbf{R}) \cap S^1(x_0, r) \neq \emptyset$ trong đó $S^1(x_0, r) := \{x \in \mathbf{R}^2 \mid d(x, x_0) = r\}$ (mặt cầu tâm x_0 bán kính r trong $\mathbf{R}^2$).

Bài O34. Cho (X, d) là một không gian mêtric. Với $A, B \subset X$, ta đặt

$$e(A, B) := \sup_{x \in A} d(x, B), \quad e(B, A) := \sup_{y \in B} d(y, A)),$$

$$h(A, B) := \max(e(A, B), e(B, A)). \qquad (*)$$

(a) Giả sử ϵ là một số dương cho trước. Chứng minh rằng nếu $h(A, B) < \epsilon$ thì $\forall x \in A, \exists y \in B : d(x, y) < \epsilon$ và $\forall y \in B, \exists x \in A : d(x, y) < \epsilon$.

Ngược lại, nếu $\forall x \in A, \exists y \in B : d(x, y) \leq \epsilon$ và $\forall y \in B, \exists x \in A : d(x, y) \leq \epsilon$ thì $h(A, B) \leq \epsilon$.

Bây giờ giả mêtric d là bị chặn, nghĩa là có số $M > 0$ sao cho $d(x, y) \leq M$ mọi $x, y \in X$. Gọi $\mathcal{F}(X)$ là họ tất cả các tập con đóng khác rỗng của X.

(b) Chứng tỏ rằng h là một mêtric trên $\mathcal{F}(X)$ (gọi là mêtric Hausdorff).

(c) Chứng tỏ rằng nếu (X, d) đầy đủ thì $(\mathcal{F}(X), h)$ cũng là không gian đầy đủ.

(d) Gọi $\mathcal{F}_{tb}(X)$ là họ tất cả những tập đóng và hoàn toàn bị chặn trong X. Chứng tỏ rằng $\mathcal{F}_{tb}(X)$ là tập đóng trong $(\mathcal{F}(X), h)$.

(e) Chứng tỏ rằng nếu (X, d) là không gian hoàn toàn bị chặn thì $(\mathcal{F}(X), h)$ cũng hoàn toàn bị chặn. Do đó nếu

MATH-EDUCARE

(X, d) là không gian compact thì $(\mathcal{F}(X), h)$ cũng là không gian compact.

(f) Giả sử (X, d) là đầy đủ. Chứng tỏ rằng họ $\mathcal{F}_k(X)$ gồm tất cả các tập compact của X là một không gian con đầy đủ của $(\mathcal{F}(X), h)$.

Bài O35. Trong không gian $C[a, b]$ với mêtric "max", ta đặt, với mỗi $n \in \mathbf{N}$,

$$F_n = \bar{B}(0, 1) \cap \{x \in C_{[a,b]} | x(0) = 0,\ x(t) = 1 \text{ khi } t \in [\frac{1}{n}, 1]\}.$$

Chứng minh rằng:

(a) F_n là tập đóng trong $C[a, b]$, mọi $n \in \mathbf{N}$,

(b) $F_{n+1} \subset F_n$, mọi $n \in \mathbf{N}$ và $\cap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

Bài O36. Gọi l^1 là tập hợp tất cả các dãy số thực $x = (\xi_n)_n$ thoả mãn $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < +\infty$. Với $x = (\xi_n)_n, y = (\eta_n)_n \in l^1$, ta đặt

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|.$$

Chứng minh rằng:

(a) d là một mêtric trên l^1,

(b) (l^1, d) là một không gian đủ,

(c) (l^1, d) là một không gian khả li.

Bài O37. Trong tập hợp s tất cả các dãy số thực $x = (\xi_n)_n$ ta đặt, với $x = (\xi_n)_n$, $y = (\eta_n)_n \in s$,

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}.$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

(a) Chứng minh rằng d là một mêtric trên s.

(b) Chứng minh rằng (s, d) là một không gian đủ.

Bài O38. (a) Giả sử X là một không gian mêtric đủ và $(F_n)_{n\in \mathbf{N}}$ là một dãy các tập đóng không rỗng trong X sao cho $F_n \supset F_{n+1}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \text{diam} F_n = 0$ (dãy như vậy gọi là dãy tập đóng thắt lại). Chứng tỏ rằng $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

(b) Chứng minh rằng nếu trong một không gian mêtric X mà mọi dãy các tập đóng không rỗng thắt lại đều có giao khác rỗng thì X là không gian đủ.

(c) Với giả thiết ở câu (a), hãy chứng tỏ rằng $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ là tập chỉ gồm có một điểm.

Chú ý. Ta nhắc lại định nghĩa diam $F := \sup\limits_{x,y\in F} d(x, y)$.

Bài O39. Cho (E, d) là một không gian mêtric compact và $f : E \to E$ là một ánh xạ thỏa mãn điều kiện sau

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x, y), \text{ mọi } x, y \in E.$$

(a) Cho a là một phần tử của E. Chứng tỏ rằng dãy $(f^n(a))_{n\in \mathbf{N}}$ có một dãy con hội tụ về a (kí hiệu f^n chỉ phép hợp n lần của ánh xạ f như trong Bài 2.5).

(b) Cho b là một phần tử khác của E. Chứng tỏ rằng dãy $(f^n(a), f^n(b))_n$ có một dãy con hội tụ về (a, b).

(c) Chứng tỏ rằng $f(E)$ là trù mật trong E và

$$d(f(a), f(b)) = d(a, b).$$

Từ đó suy ra rằng f là một phép đẳng cự từ E lên E.

Bài O40. Cho (E, d) là một không gian mêtric và $(u_n)_n$ là một dãy trong E. Giả sử rằng tồn tại một dãy hội tụ $(l_p)_{p\in \mathbf{N}}$ trong E có giới hạn là l và sao cho với mỗi $p \in \mathbf{N}$, l_p là giới hạn của một dãy con của $(u_n)_n$. Chứng minh rằng khi đó l cũng là giới hạn của một dãy con của $(u_n)_n$.

Bài O41. Cho $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ là một ánh xạ liên tục.

(a) Giả sử rằng tồn tại $l \in \mathbf{R}$ sao cho $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x) = l$. Chứng tỏ rằng f là bị chặn và liên tục đều trên $\mathbf{R}^n$.

(b) Giả sử rằng $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$. Chứng tỏ rằng f là bị chặn dưới và đạt được giá trị nhỏ nhất trên $\mathbf{R}^n$.

D. Bài giải, hướng dẫn

1.1.

(a) Vì d là một mêtric trên X và theo định nghĩa của ρ_1, ta có (với mọi $x, y \in X$)

$$\rho_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \rho_1(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \\ &\Leftrightarrow d(x,y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

$$\rho_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \rho_1(y,x).$$

Để chứng tỏ ρ_1 thoả bất đẳng thức tam giác ta xét hàm φ . $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ với $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}, t \in [0,+\infty)$. Hàm φ đơn điệu tăng ngặt trên $[0,+\infty)$ (vì $\varphi'(t) > 0,\ t \in [0,+\infty)$) nên nếu $x, y, z \in X$ thì từ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ ta nhận được

$$\begin{aligned} \rho_1(x,z) &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \\ &\leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = \rho_1(x,y) + \rho_1(y,z) \end{aligned}$$

(để ý $d(x,y) \geq 0, d(y,z) \geq 0$). Vậy ρ_1 thoả mãn bất đẳng thức tam giác và ρ_1 là một mêtric trên X.

Để chứng tỏ ρ_2 là một mêtric ta cũng chỉ cần kiểm tra ρ_2 thoả mãn bất đẳng thức tam giác. Các tiên đề còn lại có thể

được kiểm tra tương tự như đối với ρ_1. Giả sử $x, y, z \in X$.

Nếu $\max\{d(x,y), d(y,z)\} < 1$ thì

$$\rho_2(x,z) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = \rho_2(x,y) + \rho_2(y,z).$$

Nếu $\max\{d(x,y), d(y,z)\} \geq 1$ thì

$$\rho_2(x,z) = \min(1, d(x,z)) \leq 1 \leq \rho_2(x,y) + \rho_2(y,z).$$

Như thế ρ_2 cũng là mêtric trên X.

(b) Giả sử $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ trong (X,d). Khi đó $d(x_n, x_0) \to 0$ khi $n \to \infty$ và do đó

$$\rho_1(x_n, x_0) = \frac{d(x_n, x_0)}{1 + d(x_n, x_0)} \to 0.$$

Vậy $x_n \to x_0$ trong (X, ρ_1).

Nếu $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ trong (X,d) thì ta cũng có

$$\forall \epsilon > 0 \ (\epsilon < 1), \exists n_0 \in \mathbf{N} \ : \ \forall n \geq n_0, d(x_n, x_0) < \epsilon < 1.$$

Do đó khi $n \geq n_0$ thì

$$\rho_2(x_n, x_0) = d(x_n, x_0) < \epsilon.$$

Điều này chứng tỏ $x_n \to x_0$ trong (X, ρ_2). Vậy $(i) \Rightarrow (ii)$ và $(i) \Rightarrow (iii)$.

Bây giờ giả sử $\rho_1(x_n, x_0) \to 0$ khi $n \to \infty$. Khi đó từ công thức xác định ρ_1 ta được

$$d(x_n, x_0) = \frac{\rho_1(x_n, x_0)}{1 - \rho_1(x_n, x_0)} \to 0$$

khi $n \to \infty$. Nghĩa là $x_n \to x_0$ trong (X,d). Vậy $(ii) \Rightarrow (i)$.

Nếu $\rho_2(x_n, x_0) \to 0$ thì khi đó với $\epsilon > 0$, $(\epsilon < 1)$ tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho mọi $n \geq n_0$ thì $\rho_2(x_n, x_0) < \epsilon$. Nhưng lúc này ta cũng có $d(x_n, x_0) = \rho_2(x_n, x_0) < \epsilon$. Vậy ta cũng chứng

MATH-EDUCARE

minh được $(iii) \Rightarrow (i)$ $\square$

Nhận xét.

(i) Khẳng định ở (b) cho thấy d, ρ_1 và ρ_2 là các mêtric tương đương tôpô. Tuy nhiên một điều đáng lưu ý là mêtric d có thể không bị chặn nhưng cả ρ_1 và ρ_2 đều bị chặn (cụ thể là $\rho_1(x,y) \leq 1$ và $\rho_2(x,y) \leq 1$), mọi $x, y \in X$.

(ii) Từ phép chứng minh ở (b) cũng dễ thấy rằng khái niệm dãy Cauchy trong cả 3 không gian $(X,d), (X,\rho_1), (X,\rho_2)$ là trùng nhau. Điều này cùng với (b) cho thấy ba không gian trên hoặc cùng đầy đủ, hoặc cùng không đầy đủ.

1.2. Hướng dẫn. Việc kiểm tra các tiên đề mêtric cho d_1, d_∞ là đơn giản, dựa vào bất đẳng thức về trị tuyệt đối của các số thực:

$$|a-c| \leq |a-b| + |b-c|.$$

1.3. Hướng dẫn. Chứng minh tương tự như đối với không gian $C_{[a,b]}$. Để ý rằng $f, g \in C(X)$ thì f, g bị chặn và $\rho(f,g) \in \mathbf{R}$.

1.4.

(a) Giả sử $x \in X$ mà $d(x,A) := \inf_{y \in A} d(x,y) = 0$. Khi đó tồn tại $(x_n)_n \subset A$ sao cho $d(x,x_n) \to d(x,A) = 0$ hay là $x_n \to x$ khi $n \to \infty$. Vậy $x \in \overline{A}$.

• Ngược lại, giả sử $x \in \overline{A}$. Khi đó tồn tại $(x_n)_n \subset A$ sao cho $d(x,x_n) \to 0$. Vì $0 \leq d(x,A) \leq d(x,x_n) \to 0, n \to \infty$ nên $d(x,A) = 0$. Vậy $\overline{A} = \{x \in X \mid d(x,A) = 0\}$.

(b) Vì A đóng khi và chỉ khi $\overline{A} = A$ nên cùng với (a) ta được,

$$A \text{ đóng} \Leftrightarrow A = \{x \in X \mid d(x,A) = 0\}. \qquad (**)$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

Dễ kiểm tra được rằng

$$\{x \in X \mid d(x, A) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid d(x, A) < \frac{1}{n}\}.$$

Điều này cùng với (**) cho ta

$$A \text{ đóng } \Leftrightarrow A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid d(x, A) < \frac{1}{n}\}.$$

Gọi $G_n := \left\{x \in X \mid d(x, A) < \frac{1}{n}\right\}$. G_n là mở trong (X, d). Thật vậy, giả sử $x \in G_n$. Khi đó $r := \frac{1}{n} - d(x, A) > 0$. Ta chứng minh $B(x, \frac{r}{2}) \subset G_n$. Để ý rằng nếu $y \in B(x, \frac{r}{2})$ thì $d(x, y) < \frac{r}{2}$ và nếu $a \in A$ thì

$$d(y, A) \leq d(y, a) \leq d(x, y) + d(y, a) < \frac{r}{2} + d(y, a).$$

Do đó

$$d(y, A) < \frac{r}{2} + d(y, A) < r + d(y, A) = \frac{1}{n},$$

hay $y \in G_n$.

Vậy A đóng thì $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ và các tập G_n là mở ($n \in \mathbf{N}$). Nói khác đi, A có dạng G_δ. Vì phần bù của một tập mở là tập đóng nên từ chứng minh trên ta cũng suy ra được rằng một tập đóng là một tập dạng F_σ.

(c) Nếu ρ và d tương đương tôpô thì ánh xạ đồng nhất là phép đồng phôi nên họ các tập mở (và do đó họ các tập đóng) trong (X, ρ) và (X, d) là trùng nhau. Vậy các bao đóng $\overline{A}^{\rho}$ và $\overline{A}^{d}$ của A tương ứng trong (X, ρ) và (X, d) cũng trùng nhau.

MATH-EDUCARE

Từ đây,

$$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow (x \in \overline{A}^d = \overline{A}^\rho)$$
$$\Leftrightarrow \rho(x, A) = 0.$$

Ngược lại, giả sử có (*). Khi đó theo (**),

A đóng trong (X, d)
$\Leftrightarrow A = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\} = \{x \in X \mid \rho(x, A) = 0\}$
$\Leftrightarrow A$ đóng trong (X, ρ).

Nghĩa là họ các tập đóng (và do đó họ các tập mở) trong (X, d) và (X, ρ) trùng nhau. Do đó ánh xạ đồng nhất $id : (X, d) \to (X, \rho)$ là một phép đồng phôi, nghĩa là d và ρ là tương đương tôpô □

Nhận xét.

(i) Tính mở của tập G_n sau này sẽ được suy ra một cách đơn giản từ tính liên tục của ánh xạ $d(., A)$ (Bài tập 2.3).

(ii) Qua phép chứng minh của câu (c) ta cũng thấy ngay được rằng

$$\rho \sim d \Leftrightarrow (\overline{A}^\rho = \overline{A}^d), \text{ mọi } A \subset X.$$

(iii) Thực ra ở (c) ta đã chứng minh được

$$\{x \in X \mid d(x, A) < \alpha\}$$

là mở và do đó $\{x \in X \mid d(x, A) \geq \alpha\}$ là đóng, mọi $A \subset X$, $\alpha > 0$ □

1.5.

(a) Dễ thấy rằng với mọi $x, y \in \mathbf{R}$, $\rho(x, y) \geq 0$ và $\rho(x, y) = \rho(y, x)$. Lại để ý rằng $1 + |x - y| \geq 1$ nên

$$(\rho(x, y) = 0) \Leftrightarrow (|x - y| = 0)$$
$$\Leftrightarrow (x = y).$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

Ta còn chứng minh ρ thoả mãn bất đẳng thức tam giác. Giả sử $x, y, z \in \mathbf{R}$.

Nếu chỉ một trong hai số x, z dương thì $\rho(x,z) = 1 + |x - z|$ còn lúc này $\rho(x,y) + \rho(y,z) = 1 + |x-y| + |y-z|$ trong tất cả các trường hợp có thể xảy ra ($x > 0, y > 0; x > 0, y \leq 0; z > 0, y \leq 0; z > 0, y > 0$). Vậy

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z). \qquad (*)$$

Nếu $x < 0$ và $z < 0$ thì $\rho(x,z) = |y - z|$ còn

$$\rho(x,y) + \rho(y,z) = \begin{cases} 2 + |x-y| + |y-z|, & \text{nếu } y > 0 \\ |x-y| + |y-z| \cdot & \text{nếu } y \leq 0. \end{cases}$$

Trường hợp này ta cũng có $(*)$. Tương tự như vậy nếu $x > 0$ và $z > 0$ thì $(*)$ cũng đúng. Vậy ρ là một mêtric trên $\mathbf{R}$.

(b) Mêtric ρ và mêtric thông thường d trong $\mathbf{R}$ là không tương đương tôpô. Thật vậy, hãy xét dãy $(x_n)_n \subset \mathbf{R}$ với $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Vì $d(x_n, 0) = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$ nên $x_n \to 0$ trong $(\mathbf{R}, d)$. Tuy nhiên với mọi $n \in \mathbf{N}$,

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = 1 + \left|\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right| \geq 1$$

nên $(x_n)_n$ không là dãy Cauchy trong $(\mathbf{R}, \rho)$ và do đó không hội tụ trong $(\mathbf{R}, \rho)$ □

1.6.

(a) Từ các bao hàm thức $A \cap B \subset A$ và $A \cap B \subset B$ ta được $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int}A$ và $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int}B$. Do đó $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int}A \cap \text{int}B$. Mặt khác, $\text{int}A \cap \text{int}B \subset A \cap B$ và $\text{int}A \cap \text{int}B$ là mở nên $\text{int}A \cap \text{int}B \subset \text{int}(A \cap B)$. Khẳng định (a) được chứng minh.

(b) Vì $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$ nên $\text{int}A \subset \text{int}(A \cup B)$ và $\text{int}B \subset \text{int}(A \cup B)$ và do đó $\text{int}A \cup \text{int}B \subset \text{int}(A \cup B)$.

(c) Vì $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$, $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, ta được

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

đẳng thức ở (c) được chứng minh.

(d) Rõ ràng là $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Do đó $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(e) Lấy tuỳ ý $x \in \overline{A} \cap B$ và $r > 0$. Vì B là mở nên tồn tại $\delta > 0$, $\delta < r$ sao cho $B(x, \delta) \subset B$. Khi đó

$$B(x,r) \cap (A \cap B) \supset (B(x,\delta) \cap B) \cap A = A \cap B(x,\delta) \neq \emptyset$$

(vì $x \in \overline{A}$). Vậy $x \in \overline{A \cap B}$ và ta đã chứng minh được $\overline{A} \cap B \subset \overline{A \cap B}$ □

Nhận xét. Ở các câu (b), (c), (d), nói chung dấu "=" không xảy ra. Đề nghị độc giả tìm các thí dụ minh họa.

1.7.

(a) Rõ ràng $d(x_0, A) \geq 0$. Nếu $d(x_0, A) = 0$ thì $x_0 \in \overline{A}$ (xem Bài 1.4). Vì $\overline{A} = A$ do A đóng nên $x_0 \in A$, mâu thuẫn với giả thiết $x_0 \notin A$. Vậy $d(x_0, A) > 0$.

Cách 2. $x_0 \in A^c$ mở nên tồn tại $r > 0$ để $B(x_0, r) \cap A = \emptyset$. Khi đó mọi $y \in A, d(x_0, y) \geq r$ nên $d(x_0, A) \geq r > 0$.

(b) Lấy tuỳ ý $x \in G$. Khi đó $r = d(x, B) - d(x, A) > 0$. Ta chứng minh $B(x, \frac{r}{4}) \subset G$. Thật vậy, nếu $y \in B(x, \frac{r}{4})$ thì $d(x, y) < \frac{r}{4}$. Từ bất đẳng thức (1.2) ở phần A, ta được

$$\begin{aligned} d(x, B) &\geq d(x, B) - d(x, y) \\ - \; d(x, A) &\geq -d(x, A) - d(x, y). \end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{aligned} d(y, B) - d(y, A) &\geq d(x, B) - d(x, A) - 2d(x, y) \\ &> r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0. \end{aligned}$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

Điều này có nghĩa là $y \in G$ hay ta đã chứng minh được $B(x, \frac{r}{4}) \subset G$. Vậy G là mở.

Nếu $x \in A$ thì $d(x, A) = 0$ và $x \notin B$. Theo (a) thì $d(x, B) > 0$ nên $x \in G$. Vậy $A \subset G$.

Giả sử $\overline{G} \cap B \neq \emptyset$ và $x \in \overline{G} \cap B$. Khi đó $x \in B$ (nên $d(x, B) = 0$) và $x \in \overline{G}$. Tồn tại $(x_n)_n \subset G$ sao cho $d(x_n, x) \to 0$ khi $n \to \infty$. Để ý rằng

$$|d(x_n, B) - d(x, B)| = |d(x_n, B)| \leq d(x_n, x).$$

Vậy $d(x_n, B) \to 0$ khi $n \to \infty$. Từ đây (và lưu ý $x_n \in G$, mọi n)

$$d(x, A) \leq d(x_n, A) + d(x_n, x) < d(x_n, B) + d(x_n, x)$$

cho ta $d(x, A) = 0$ vì vế phải dần đến 0 khi $n \to \infty$. Từ đây $x \in A$ vì A là đóng. Như thế $x \in A \cap B$. Mâu thuẫn này chứng tỏ $\overline{G} \cap B = \emptyset$.

Đặt $U := G$ và $V := X \setminus \overline{G}$ thì U, V là các tập mở và thoả mãn điều kiện đề bài □

Nhận xét. Sau này ta sẽ thấy việc chứng minh tập G mở sẽ đơn giản hơn nhiều khi ta sử dụng tính liên tục của hàm $d(., A) - d(., B)$ (Bài tập 2.3).

1.8.

(a) Ta sẽ kiểm tra d thoả mãn bất đẳng thức tam giác. Việc d thoả mãn các tiên đề khác được suy ra ngay từ định nghĩa của d.

Giả sử $m, n, k \in \mathbf{N}$. Ta cần chứng minh

$$d(m, n) \leq d(m, k) + d(k, n). \qquad (*)$$

Nếu $m = k$ hay $n = k$ thì rõ ràng (*) đúng.

Nếu $m \neq k$ và $n \neq k$ thì vế trái của (*) bé hơn hay bằng 2 còn vế phải lớn hơn hay bằng 2. Do đó (*) cũng đúng trong trường hợp này.

Vậy d là một mêtric trên $\mathbf{N}$.

(b) Giả sử $(k_n)_n$ là một dãy cơ bản trong $(\mathbf{N}, d)$. Do định nghĩa

$$d(k_n, k_m) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k_n = k_m \\ 1 + \dfrac{1}{k_n + k_m} & \text{nếu } k_n \neq k_m, \end{cases}$$

nên với $\epsilon > 0$ và $\epsilon < 1$, tồn tại $n_0 > 0$ sao cho với mọi $m, n \geq n_0$ thì $d(k_m, k_n) < \epsilon < 1$. Vậy $k_m = k_n$, mọi $m, n \geq 0$ hay nói khác đi $(k_n)_n$ là một dãy dừng và $k_n = k_{n_0}$ mọi $n \geq n_0$. Do đó $k_n \to k_{n_0}, n \to \infty$. Như vậy $(\mathbf{N}, d)$ là một không gian mêtric đủ.

(c) Hướng dẫn. Dễ dàng kiểm tra được rằng

$$\overline{B}_n := \overline{B}(n, 1 + \frac{1}{2n}) = \{k \in \mathbf{N} \mid k \geq n\}, n \in \mathbf{N}.$$

Nhận xét. Dễ thấy rằng $\overline{B}_n \supset \overline{B}_{n+1}$, mọi $n \in \mathbf{N}$. Nghĩa là $\left(\overline{B}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ là một dãy các hình cầu đóng lồng nhau trong $(\mathbf{N}, d)$. Tuy nhiên điều này không mâu thuẫn với Định lí Cantor (xin độc giả hãy lí giải).

1.9.

(a) Ta chứng minh M_0 là tập mở. Giả sử $x \in M_0$. Khi đó $z = x_0 - x \in C_{[0,1]}$, $z(t) > 0$, mọi $t \in [0, 1]$ nên z đạt giá trị bé nhất tại một điểm $t_0 \in [0, 1]$. Ta có $z(t) = x_0(t) - x(t) \geq x_0(t_0) - x(t_0) = r > 0$ mọi $t \in [0, 1]$. Ta chứng minh $B(x, \frac{r}{2}) \subset M_0$. Nếu $y \in B(x, \frac{r}{2})$ thì $|y(t) - x(t)| < \frac{r}{2}$, mọi $t \in [0, 1]$. Do đó với mọi $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} x(t) - y(t) &\geq -\tfrac{r}{2} \\ x_0(t) - x(t) &\geq r. \end{aligned}$$

Từ đây $x_0(t) - y(t) > \frac{r}{2} > 0$, mọi $t \in [0, 1]$. Vậy $y \in M_0$ và ta có $B(x, \frac{r}{2}) \subset M_0$ hay M_0 là mở.

Giả sử $(x_n)_n \subset M_1$ và $x_n \to \bar{x}$ trong $C_{[0,1]}$. Khi đó $x_n(t) \to \bar{x}(t)$, khi $n \to \infty$, với mọi $t \in [0,1]$.

Vì $x_n(t) \leq x_0(t), t \in [0,1]$ nên $\bar{x}(t) \leq x_0(t), t \in [0,1]$, nghĩa là $\bar{x} \in M_1$. Vậy M_1 đóng.

Hoàn toàn tương tự nếu $x_1 \in C_{[0,1]}$ thì tập

$$N_0 := \{x \in C_{[0,1]} \mid x_1(t) < x(t), \text{ mọi } t \in [0,1]\}$$

là mở còn tập

$$N_1 := \{x \in C_{[0,1]} \mid x_1(t) \leq x(t), \text{ mọi } t \in [0,1]\}$$

là đóng.

Do đó

$$\begin{aligned} M_2 &= \{x \in C_{[0,1]} | x(t) < B, t \in [0,1]\} \\ &\cap \{x \in C_{[0,1]} | A < x(t), t \in [0,1]\} \end{aligned}$$

là mở vì bằng giao của 2 tập mở (dạng N_0, M_0 với $x_0 \equiv B, x_1 \equiv A$). Tương tự

$$\begin{aligned} M_3 &= \{x \in C_{[0,1]} | \ x(t) \leq B, \forall t \in [0,1]\} \\ &\cap \{x \in C_{[0,1]} | A \leq x(t), \forall t \in [0,1]\} \end{aligned}$$

là tập đóng.

(b) Xét dãy $(x_n)_n \subset M_4$ với $x_n(t) = \frac{t}{n}, t \in [0,1]$. Khi đó

$$d(x_n, 0) = \frac{1}{n} \to 0 \text{ khi } n \to \infty$$

nên $x_n \to 0$ (0 chỉ hàm đồng nhất 0) trong $C_{[0,1]}$ nhưng $0 \notin M_4$. Vậy M_4 không phải là tập đóng.

Giả sử $(x_n)_n \subset M_5$ và $x_n \to \bar{x}$ trong $C_{[0,1]}$. Rõ ràng lúc này $\bar{x}$ là liên tục trên $[0,1]$ và $\bar{x}(t) \in [0,1]$ mọi $t \in [0,1]$. Với mọi $\bar{t} \in [0,1]$, vì mọi $n \in \mathbf{N}, x_n$ là toàn ánh nên tồn tại $t_n \in [0,1]$ sao cho $x_n(t_n) = \bar{t}$, mọi $n \in \mathbf{N}$. Dãy $(t_n)_n \subset [0,1]$ nên tồn tại một dãy con của nó $(t_{n_k})_k$ hội tụ về một phần tử $t_0 \in [0,1]$.

Khi đó vì $\bar{x}$ liên tục nên

$$\lim_{k\to\infty} \bar{x}(t_{n_k}) = \bar{x}(t_0). \qquad (*)$$

Mặt khác,

$$|\bar{t} - \bar{x}(t_{n_k})| = |x_{n_k}(t_{n_k}) - \bar{x}(t_{n_k})| \le d(x_{n_k}, \bar{x}) \to 0$$

khi $k \to \infty$. Như vậy $\lim_{k\to\infty} \bar{x}(t_{n_k}) = \bar{t}$. Kết hợp với (*) ta được $\bar{x}(t_0) = \bar{t}$. Vậy $\bar{x}$ là toàn ánh từ $[0,1]$ lên $[0,1]$. Nói cách khác, $\bar{x} \in M_5$. Điều này chứng tỏ M_5 là đóng $\square$

2.1.

(a) Cho $\epsilon > 0$. Do f liên tục đều trên X nên có $\delta > 0$ sao cho với $x, x' \in X$ mà $d(x,x') < \delta$ thì $d(f(x), f(x')) < \epsilon$. Vì $(x_n)_n$ là dãy Cauchy nên có $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $d(x_m, x_n) < \delta$ khi $m, n \ge n_0$. Do đó $d(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon$ với mọi $m, n \ge n_0$, tức là $(f(x_n))_n$ là dãy Cauchy trong Y.

(b) Giả sử $\epsilon > 0$. Vì f liên tục đều nên có $\delta > 0$ sao cho

$$f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\epsilon), \ \forall x \in X.$$

Do A hoàn toàn bị chặn, tồn tại các hình cầu $B(x_i, \delta)$, $1 \le i \le n$ mà $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta)$. Từ đây ta có

$$f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} f(B(x_i,\delta)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (B(f(x_i),\epsilon)).$$

Vậy $f(A)$ hoàn toàn bị chặn trong Y $\square$

2.2.

Lấy tùy ý $x_0 \in X$. Giả sử $(x_n)_n \subset X$ và $x_n \to x_0$ khi $n \to \infty$. Do f và g liên tục nên $f(x_n) \to f(x_0)$ và $g(x_n) \to g(x_0)$ khi $n \to \infty$. Từ đây và tính liên tục của mêtric d ta suy ra

$$h(x_n) = d(f(x_n), g(x_n)) \to d(f(x_0), g(x_0)) = h(x_0).$$

Vậy h liên tục tại x_0 và vì $x_0 \in X$ được lấy tùy ý nên h liên tục trên X. Từ đây ta có

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = \{x \in X \mid h(x) = 0\} = h^{-1}(\{0\})$$

là tập đóng trong X vì $\{0\}$ là tập đóng trong $\mathbf{R}$ □

Chú ý. Để chứng minh h liên tục, có thể sử dụng bất đẳng thức tứ giác.

2.3. Hướng dẫn.

(a) Sử dụng bất đẳng thức $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$.

(b) Để ý rằng

$$\{x \in X \mid d(x, A) < \alpha\} = d(., A)^{-1}((-\infty, \alpha)),$$

$$\{x \in X \mid d(x, A) \leq \alpha\} = d(., A)^{-1}((-\infty, \alpha]).$$

(c) Đặt $h(x) = d(x, B) - d(x, A), x \in X$ thì h liên tục trên X và

$$\{x \in X \mid d(x, A) < d(x, B)\} = h^{-1}((0, +\infty)).$$

Đặt

$$U := \{x \in X \mid d(x, A) < d(x, B)\},$$

$$V := \{x \in X \mid d(x, B) < d(x, A)\}.$$

Khi đó U, V là các tập mở trong X. Hơn nữa, $x \in A$ thì $x \notin B$ và từ đó, $d(x, B) > 0$. Vậy $d(x, A) = 0 < d(x, B)$ hay $x \in U$. Nghĩa là $A \subset U$. Tương tự, $B \subset V$. Cuối cùng do U, V là những tập mở và rời nhau nên $U \subset V^c$ và $V \subset U^c$. Từ đây $\overline{U} \subset V^c, \overline{V} \subset U^c$ hay $\overline{U} \cap V = \emptyset$ và $\overline{V} \cap U = \emptyset$.

2.4.

Do φ liên tục trên $[0, 1]$ nên có $M > 0$ sao cho $|\varphi(t)| \leq M$,

với mọi $t \in [0,1]$. Lúc này, với bất kì $x, y \in C_{[0,1]}$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \int_0^1 \varphi(t)x(t)dt - \int_0^1 \varphi(t)y(t)dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |\varphi(t)| \cdot |x(t) - y(t)|dt \\ &\leq M \int_0^1 |x(t) - y(t)|dt \\ &\leq M \cdot \int_0^1 d(x,y)dt = Md(x,y). \end{aligned}$$

Với mọi $\epsilon > 0$, lấy $\delta < \frac{\epsilon}{M}$ thì với mọi $x, y \in C_{[0,1]}$ mà $d(x,y) < \delta$ ta được

$$|f(x) - f(y)| \leq Md(x,y) < M \cdot \delta < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Vậy f liên tục đều trên $C_{[0,1]}$ □

Nhận xét. (i) Một ánh xạ g: $X \to Y$ (X, Y là các không gian mêtric) sao cho có số $M > 0$ để

$$d(g(x), f(x)) \leq Md(x,y), \text{ với mọi } x, y \in X$$

được gọi là một ánh xạ Lipschitz trên X với hằng số Lipschitz M. Ánh xạ f trong bài tập trên là một ánh xạ Lipschitz trên $C_{[0,1]}$.

(ii) Dễ thấy rằng một ánh xạ Lipschitz trên X thì liên tục đều trên X.

2.5.

Do f' liên tục trên $\mathbf{R}$ và $f'(p) < 1$ nên với $a > 0$ mà $|f'(p)| < a < 1$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f'(x)| < a$ với mọi $x \in U = [p-\delta, p+\delta]$. Theo định lí giá trị trung bình Lagrange, mọi $x \in U$, tồn tại ξ nằm giữa x và p sao cho

$$\begin{aligned} |f(x) - p| &= |f(x) - f(p)| \leq |f'(\xi)| \cdot |x - p| \\ &< a|x - p| < |x - p| \leq \delta. \end{aligned}$$

Vậy $f(x) \in U$ với mọi $x \in U$. Tương tự như trên,

$$|f^2(x) - p| \le a|f(x) - p| \le a^2|x - p| \le a^2\delta, \ldots$$

$$|f^n(x) - p| \le a|f^{n-1}(x) - p| \le \cdots \le a^n\delta, \ \forall x \in U, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Từ đó, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p$ với mọi $x \in U$ (để ý $0 < a < 1$ nên $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$) □

Chú ý. f là ánh xạ co từ U vào U.

2.6.

Lấy tùy ý một số thực a với $|f'(p)| > a > 1$. Do f' liên tục nên tồn tại khoảng mở $U = (p - \delta, p + \delta)$ sao cho $|f'(x)| > a$ với mọi $x \in U$. Với $x \in U \setminus \{p\}$, theo Định lí Lagrange ta có

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| > a|x - p|, \ \forall x \in U \setminus \{p\},$$

và

$$\begin{aligned} |f^n(x) - p| &= |f(f^{n-1}(x)) - f(p)| > a|f^{n-1}(x) - p| \\ &> \cdots > a^n|x - p| \end{aligned}$$

mọi $n \in \mathbf{N}$. Vì $\lim_{n\to\infty} a^n|x - p| = \infty$ nên tồn tại số tự nhiên k sao cho $a^k|x - p| > \delta$ và do đó, $|f^k(x) - p| > a^k|x - p| > \delta$, tức là $f^k(x) \notin U$ □

2.7.

Điều kiện cần là hiển nhiên. Ta chứng minh điều kiện đủ. Giả sử $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Khi đó $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$ và

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((-\infty, b)) \cap f^{-1}((a, +\infty))$$

là tập mở trong X. Bây giờ giả sử V là tập mở của $\mathbf{R}$. Khi đó theo định lí về cấu trúc tập mở trong $\mathbf{R}$ ta có thể biểu diễn $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ (các khoảng mở ở vế phải rời nhau từng đôi một) và vì vậy $f^{-1}(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((a_n, b_n))$ là tập mở trong

X. Vậy f liên tục $\square$

2.8.

(a) Vì hàm $x(t) \equiv 1$ thuộc M nên $M \neq \emptyset$. Giả sử $(x_n)_n \subset M, x_n \to x_0 \in C_{[0,1]}$ (khi $n \to \infty$). Vì sự hội tụ trong $C_{[0,1]}$ là sự hội tụ đều nên $x_0(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) \in [0,1]$ với mọi $t \in [0,1]$, $x_0(1) = 1$ và x_0 liên tục trên $[0,1]$. Như vậy $x_0 \in M$ và M là tập đóng trong $C_{[0,1]}$. Mọi $x \in M, d(0,x) = \max_{0\leq t\leq 1} |x(t)| \leq 1$ nên $M \subset \overline{B}(0,1)$. Vậy M là tập bị chặn trong $C_{[0,1]}$.

(b) Giả sử $x \in M$ và $\epsilon > 0$. Chọn $\delta > 0$ sao cho $\delta < \frac{\epsilon}{3}$ và $\delta < 1$. Khi đó với mọi $y \in C_{[0,1]}$ mà $d(x,y) < \delta$ ta có

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left|\int_0^1 y^2(t)dt - \int_0^1 x^2(t)dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 (y^2(t) - x^2(t))dt\right| \\
&\leq \int_0^1 |y(t) - x(t)||y(t) + x(t)|dt \\
&\leq \int_0^1 |y(t) - x(t)|[2|x(t)| + |y(t) - x(t)|]dt \\
&\leq \int_0^1 d(x,y)[2 + d(y,x)]dt \\
&= d(y,x)[2 + d(y,x)] \\
&\leq d(y,x)(2+1) < 3\delta < \epsilon.
\end{aligned}$$

Vậy f liên tục tại x. Do $x \in M$ là bất kì nên f liên tục trên M.

Khẳng định còn lại xin độc giả tự chứng minh. Để ý

$$\inf_{x\in M} f(x) \geq 0$$

và nếu chọn $x_n(t) = t^n$, $n \in \mathbf{N}$ thì $f(x_n) \to 0$ khi $n \to \infty$ $\square$

2.9. Độc giả hãy tự giải.

2.10.

Với mỗi số tự nhiên i, $1 \leq i \leq n$, xét phép chiếu π_i: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, với $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\pi_i(x) = x_i$. Giả sử $x, y \in \mathbf{R}^n$,

MATH-EDUCARE

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Ta có

$$|\pi_i(x) - \pi_i(y)| = |x_i - y_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2} = d(x, y)$$

nên π_i là ánh xạ liên tục với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Do đó nếu f liên tục thì $f_i = \pi_i \circ f$ liên tục, $1 \leq i \leq n$.

Ngược lại, giả sử các ánh xạ f_i liên tục, $1 \leq i \leq n$. Khi đó nếu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ và $\epsilon > 0$ thì tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $y \in \mathbb{R}^n$ mà $d(x, y) < \delta$ ta đều có $|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$, với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Từ đây

$$d(f(x), f(y)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(f_i(x) - f_i(y))^2} < \epsilon$$

với mọi $y \in X$ mà $d(x, y) < \delta$. Vậy f liên tục tại x. Do $x \in X$ là tuỳ ý nên f liên tục trên X □

Chú ý. Có thể chứng minh bằng cách dùng tiêu chuẩn qua dãy.

2.11. Hướng dẫn.

(i) Giả sử $f_1(x) = x(t_1)$, $f_1(y) = y(t_2)$, $x, y \in C_{[0,1]}$, $t_1, t_2 \in [0, 1]$. Không mất tổng quát, ta có thể giả thiết $x(t_1) \geq y(t_2)$ và có

$$|f_1(x) - f_1(y)| = x(t_1) - y(t_2) \leq x(t_1) - y(t_1) \leq d(x, y).$$

(ii) Để chứng minh f_3 có thể xét ánh xạ

$$\xi\colon C_{[0,1]} \to \mathbb{R}^n,\ \xi(x) = (x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)).$$

ξ là liên tục và $f_3 = \varphi \circ \xi$ là ánh xạ liên tục.

2.12. Hướng dẫn. Hãy chứng tỏ $d(x, A) + d(x, B) > 0$

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

với mọi $x \in X$. Đặt

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}, \quad x \in X.$$

2.13.

(a) Giả sử f liên tục, $((x_n, f(x_n)))_n \subset G(f)$ và $(x_n, f(x_n)) \to (x_0, y_0) \in X \times Y$ khi $n \to \infty$. Vì sự hội tụ trong không gian tích $X \times Y$ là sự hội tụ theo từng toạ độ nên ta suy ra $x_n \to x_0$ và $f(x_n) \to y_0$. Do f là ánh xạ liên tục, $f(x_n) \to f(x_0)$. Vì giới hạn của một dãy hội tụ trong không gian mêtric là duy nhất, ta được $y_0 = f(x_0)$ hay $(x_0, f(x_0)) \in G(f)$. Vậy $G(f)$ đóng trong $X \times Y$.

(b) Ngược lại, giả sử Y là không gian mêtric compact và $G(f)$ là tập đóng. Nếu f không liên tục tại $x_0 \in X$ nào đó thì tồn tại dãy $(x_n) \subset X$, $x_n \to x_0$ và tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho với mọi $k \in \mathbf{N}$, tồn tại $n_k > k$ thoả mãn $d(f(x_{n_k}), f(x_0)) \geq \epsilon$. Do Y compact nên tồn tại dãy con $(x_{n_{k_j}})_j \subset (x_{n_k})_k$ sao cho dãy $(f(x_{n_{k_j}}))_j$ hội tụ về một phần tử $y_0 \in Y$. Khi đó $(x_{n_{k_j}}, f(x_{n_{k_j}}))_j \to (x_0, y_0) \in X \times Y$ khi $j \to \infty$. Do $G(f)$ đóng nên $(x_0, y_0) \in G(f)$, tức là $y_0 = f(x_0)$. Điều này mâu thuẫn với điều kiện $d(f(x_{n_{k_j}}), f(x_0)) \geq \epsilon$ với mọi $j \in \mathbf{N}$ □

2.14. Hướng dẫn. (a) Xem Bài tập 2.11.

(b) Gọi $x_0(t) \equiv 0$ và $x_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$. Khi đó,

$$\rho(x_n, x_0) = \int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)|dt = \int_0^1 t^n dt$$

$$= \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \ (n \to \infty),$$

nhưng $|f(x_n) - f(x_0)| = 1$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Do đó, f không liên tục tại x_0. Vậy f không liên tục trên không gian mêtric $(C_{[0,1]}, \rho)$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

2.15.

(a) Để chứng minh d là một mêtric trên $(0,1)$, ta chỉ cần chứng tỏ d thoả mãn bất đẳng thức tam giác. Các tiên đề còn lại được kiểm tra dễ dàng. Giả sử $x, y, z \in (0,1)$. Nếu $|f(x) - f(z)| \leq |x - z|$ thì

$$\begin{aligned} d(x,z) = |x-z| &\leq |x-y| + |y-z| \\ &\leq d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Trường hợp $|x - z| < |f(x) - f(z)|$ thì

$$\begin{aligned} d(x,z) = |f(x) - f(z)| &\leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| \\ &\leq d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Bất đẳng thức tam giác đã được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh d tương đương tôpô với mêtric cảm sinh trên $(0,1)$ từ mêtric thông thường. Giả sử $(x_n)_n \subset (0,1)$, $x_0 \in (0,1)$ và $|x_n - x_0| \to 0$ khi $n \to \infty$. Vì f liên tục nên $|f(x_n) - f(x_0)| \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó

$$d(x_n, x_0) = \max\{|f(x_n) - f(x_0)|, |x_n - x_0|\} \to 0$$

khi $n \to \infty$.

Ngược lại, nếu $d(x_n, x_0) \to 0$ khi $n \to \infty$ thì do $|x_n - x_0| \leq d(x_n, x_0)$ với mọi $n \in \mathbf{N}$ nên ta cũng có $|x_n - x_0| \to 0, n \to \infty$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

(b) Ta chứng minh f: $((0,1), d) \to \mathbf{R}$ là liên tục đều. Để ý rằng với mọi $x, y \in (0,1)$, ta có

$$|f(x) - f(y)| \leq \max\{|f(x) - f(y)|, |x - y|\} = d(x,y).$$

Do đó với $\epsilon > 0$ tuỳ ý, nếu ta chọn $\delta = \epsilon > 0$ thì $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ với mọi $x, y \in (0,1)$ mà $d(x,y) < \delta$. Vậy f liên tục đều trên $((0,1), d)$ □

Nhận xét. Tính liên tục của một ánh xạ (từ một không gian mêtric X vào Y, chẳng hạn) phụ thuộc chặt chẽ vào các

mêtric trên X và trên Y. Khi thay đổi các mêtric trên X và Y hay trên cả hai, một ánh xạ f: $X \to Y$ liên tục có thể trở thành liên tục đều hay có thể không còn liên tục nữa. Để ý rằng trong bài tập trên, f trở thành liên tục đều dù mêtric d vẫn tương đương tôpô với mêtric trên $(0,1)$ cảm sinh từ mêtric thông thường trên $\mathbf{R}$ và dù với mêtric thông thường, f có thể không liên tục đều trên (0, 1).

2.16.

Lấy tuỳ ý $x_0 \in C_{[0,1]}$. Giả sử $(x_n)_n \subset C_{[0,1]}$ và $x_n \to x_0$ trong $C_{[0,1]}$ khi $n \to \infty$. Ta chứng minh $F(x_n) \to F(x_0)$ trong $\mathbf{R}$. Trước hết, gọi $K > 0$ là số thoả mãn $|x_0(t)| \leq K$ với mọi $t \in [0,1]$. Vì $x_n \to x_0$ nên có $n_0 \geq 0$ sao cho $d(x_n, x_0) < 1$ khi $n \geq n_0$. Từ đó, nếu $n \geq n_0$ thì

$$|x_n(t)| \leq 1 + |x_0(t)| \leq M := 1 + K, \quad \text{mọi } t \in [0,1].$$

Lấy tuỳ ý $\epsilon > 0$. Vì φ liên tục trên tập compact $[0,1] \times [-M, M]$ nên liên tục đều trên tập này. Do đó tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $y, y' \in [-M, M]$ mà $|y - y'| < \delta$ thì

$$|\varphi(t,y) - \varphi(t,y')| < \epsilon.$$

Lại vì $x_n \to x_0$ trong $C_{[0,1]}$ nên có $n_1 > 0$ sao cho nếu $n \geq n_1$ thì $d(x_n, x_0) < \delta$. Khi $n \geq n_2 := \max\{n_0, n_1\}$ ta có

$$\begin{aligned} |F(x_n) - F(x_0)| &\leq \int_0^1 |\varphi(t, x_n(t)) - \varphi(t, x_0(t))| dt \\ &\leq \int_0^1 \epsilon dt = \epsilon. \end{aligned}$$

Vậy $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0)$ hay F liên tục trên tại x_0. Vì x_0 được lấy tuỳ ý trong $C_{[0,1]}$ nên F liên tục trên $[0,1]$ □

Nhận xét. (i) Thực ra từ quá trình chứng minh trên ta cũng suy ra được ánh xạ Φ: $C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$ xác định bởi $\Phi(x)(t) = \varphi(t, x(t))$, $t \in [0,1], x \in C_{[0,1]}$ là liên tục.

(ii) Để ý rằng nếu gọi ξ: $C_{[0,1]} \to \mathbf{R}$ với $\xi(x) = \int_0^1 x(t)dt$,

$x \in C_{[0,1]}$ thì $F = \xi \circ \Phi$.

3.1.

(a) Dễ thấy rằng với mọi $x, y \in \mathbf{R}$, $\rho(x,y) \geq 0$, $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ và $x = y$ thì $\rho(x,y) = 0$. Ngoài ra, bất đẳng thức tam giác cũng được nghiệm đúng do tính chất của giá trị tuyệt đối trong $\mathbf{R}$. Do đó, ρ là mêtric khi và chỉ khi $\rho(x,y) = 0$ kéo theo $x = y$, tức là khi và chỉ khi f là đơn ánh.

(b) Trước hết ta có nhận xét: $(x_n)_n$ là dãy cơ bản trong $(\mathbf{R}, \rho)$ khi và chỉ khi $(f(x_n))_n$ là dãy cơ bản trong $\mathbf{R}$ (với mêtric thông thường).

Giả sử $(\mathbf{R}, \rho)$ là không gian đủ và $(x_n)_n \subset \mathbf{R}$ sao cho $f(x_n) \to y_0$ khi $n \to \infty$. Khi đó $(f(x_n))_n$ là dãy cơ bản trong $\mathbf{R}$ và do đó $(x_n)_n$ là dãy cơ bản trong $(\mathbf{R}, \rho)$ nên $x_n \to x_0 \in \mathbf{R}$ trong $(\mathbf{R}, \rho)$. Lúc này, $|f(x_n) - f(x_0)| = \rho(x_n - x_0) \to 0$ khi $n \to \infty$. Nghĩa là $f(x_n) \to f(x_0)$ trong $\mathbf{R}$. Từ đây ta được $y_0 = f(x_0)$. Vậy $f(\mathbf{R})$ là tập đóng trong $\mathbf{R}$ (với mêtric thông thường).

Ngược lại, giả sử $f(\mathbf{R})$ là tập đóng trong $\mathbf{R}$. Nếu $(x_n)_n$ là dãy cơ bản trong không gian $(\mathbf{R}, \rho)$ thì $(f(x_n))_n$ là dãy cơ bản trong $\mathbf{R}$ nên $(f(x_n))_n$ hội tụ về một điểm y_0 nào đó. Vì $f(\mathbf{R})$ là tập đóng nên $y_0 \in f(\mathbf{R})$, tức là $y_0 = f(x_0)$ với $x_0 \in \mathbf{R}$. Như vậy,

$$\rho(x_n, x_0) = |f(x_n) - f(x_0)| \to 0 \text{ khi } n \to \infty$$

hay $x_n \to x_0$ trong $(\mathbf{R}, \rho)$. Vậy $(\mathbf{R}, \rho)$ là không gian đầy đủ □

3.2. Độc giả tự giải.

3.3.

Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, $f \in \mathcal{F}$, đặt

$$A_{n,f} := \{x \in \mathbf{R} \mid |f(x)| \leq n\} \text{ và } A_n = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} A_{n,f}.$$

Vì mọi $f \in \mathcal{F}$ đều liên tục nên các tập $A_{n,f}$ là đóng và do đó A_n

cũng vậy. Hơn nữa $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \mathbf{R}$. Mặt khác, theo giả thiết, với mỗi $x \in \mathbf{R}$, có $M_x > 0$ sao cho mọi $f \in \mathcal{F}$, $|f(x)| \leq M_x \leq n$ với một $n \in \mathbf{N}$ nào đó. Vậy $x \in A_n$ và do đó $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \mathbf{R}$. Tóm lại, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R}$. Không gian $\mathbf{R}$ là đầy đủ nên theo Định lí Baire về phạm trù tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $\overset{o}{\overline{A}}_{n_0} = \overset{o}{A}_{n_0} \neq \emptyset$.

Gọi $U = \overset{o}{A}_{n_0}$. Khi đó mọi $x \in U$, mọi $f \in \mathcal{F}$, ta có $|f(x)| \leq n_0 =: M$ □

3.4. Hướng dẫn. (b) Xét phép đẳng cự $f : (\mathbf{R}, d_1) \to (X, d)$ với $f(x) =$ arctg x. Trong đó $X = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ và $d(x, y) = |x - y|$. Từ đây suy ra kết qủa. Với không gian $(\mathbf{R}, d_2)$ chứng minh tương tự.

3.5.

Giả sử $x \in \overline{B}(x_0, r)$. Khi đó,

$$\begin{aligned} d(f(x), x_0) &\leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \\ &\leq \alpha d(x, x_0) + (1 - \alpha)r \\ &< \alpha r + (1 - \alpha)r = r, \end{aligned}$$

nghĩa là $f(x) \in B(x_0, r)$. Do đó, $f : \overline{B}(x_0, r) \to \overline{B}(x_0, r)$ và là ánh xạ co. Vì hình cầu đóng $\overline{B}(x_0, r)$ là đóng trong không gian đủ X nên là không gian đủ. Vậy theo Nguyên lí ánh xạ co, f có một điểm bất động duy nhất x^* trong hình cầu này. Theo (1), $f(x^*) \in B(x_0, r)$. Do đó $x^* \in B(x_0, r)$ □

3.6. Hướng dẫn. Đặt $\alpha = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < 1$. Theo Định lí Lagrange, f là một ánh xạ co từ $\mathbf{R}$ vào $\mathbf{R}$.

3.7. Hướng dẫn. Để ý rằng nếu $k > 1$ thì ánh xạ ngược f^{-1} là một ánh xạ co.

3.8. Hướng dẫn.

(a) Từ bất đẳng thức

$$|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)| \leq |\lambda| \int_a^b |K(t,s)|\,|x(s) - y(s)|ds$$

$$\leq |\lambda| d(x,y) \int_a^b |K(t,s)|ds$$

và điều kiện trên λ ta suy ra Φ là một ánh xạ co.

(b) Tương tự như câu (a), đặt

$$\Phi : C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$$

với

$$\Phi(x)(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)x(s)ds + \varphi(t), t \in [a,b].$$

Tiến hành như ở (a) ta được

$$|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)| \leq |\lambda| M(x-a) d(x,y).$$

Hãy dùng quy nạp để chứng minh rằng

$$d(\Phi^n(x), \Phi^n(y)) \leq \frac{|\lambda(b-a)|^n}{n!} d(x,y).$$

Do đó có $n_0 \in \mathbf{N}$ để cho Φ^{n_0} là một ánh xạ co. Từ đây suy ra kết qủa (xem thêm Bài tập 3.13).

3.9.

Giả sử ngược lại, $\mathbf{Q}$ là một tập dạng G_δ trong $\mathbf{R}$, tức là $\mathbf{Q} = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$ với G_n là các tập mở trong $\mathbf{R}$. Khi đó, bằng cách biểu diễn $\mathbf{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ ta được

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) = (\cup_{n=1}^{\infty} \{r_n\}) \cup_{n=1}^{\infty} G_n^c.$$

Vì $\text{int}\,\{r_n\} = \emptyset$ với mọi $n \in N$ và vì $G_n^c = \mathbf{R} \setminus G_n$ là đóng, $n = 1, 2, 3, \ldots$ nên theo Định lí Baire, tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ để $\text{int}\,(G_{n_0}^c) \neq \emptyset$. Như vậy G_n^c chứa một khoảng mở không rỗng và do đó $\mathbf{Q} \cap G_{n_0}^c \neq \emptyset$. Mặt khác, vì $\mathbf{Q} = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$ nên $\mathbf{Q} \cap G_{n_0}^c \subset G_{n_0} \cap G_{n_0}^c = \emptyset$. Mâu thuẫn này chứng to rằng $\mathbf{Q}$ không thể là tập dạng G_δ □

3.10. Độc giả tự giải.

3.11.

Trước hết nếu ta thấy nếu u thỏa mãn (1) thì u là hàm số bị chặn trên X. Ta biết (xem bài tập ôn O18) $C(X)$, không gian các hàm số liên tục và bị chặn trên X với mêtric $d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$, là một không gian mêtric đầy đủ. Với mỗi $u \in C(X)$, đặt $F(u)$ là hàm số xác định bởi $F(u)(x) = \varphi(x, u(x))$. Do φ là hàm số liên tục và bị chặn nên $F(u)$ là hàm số liên tục và bị chặn trên X, nghĩa là $F(u) \in C(X)$. Như vậy ta có ánh xạ $F : C(X) \to C(X)$. Với $u, v \in C(X)$,

$$\begin{aligned} |F(u)(x) - F(v)(u)| &= |\varphi(x, u(x)) - \varphi(x, v(x))| \\ &\leq \lambda |u(x) - v(x)|, \ \forall x \in X. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} d(F(u), F(v)) &= \sup_{x \in X} |F(u)(x) - F(v)(x)| \\ &\leq \lambda \sup_{x \in X} |u(x) - v(x)| = \lambda d(u, v). \end{aligned}$$

Vậy F là một ánh xạ co. Vì $C(X)$ là không gian mêtric đủ nên tồn tại duy nhất $u \in C(X)$ sao cho $F(u) = u$, tức là

$$u(x) = \varphi(x, u(x)), \ \forall x \in X \quad \square$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

3.12. Hướng dẫn.

(a) Để ý, mỗi $a \in \mathbf{R}$, ta có

$$\{x \in X \mid f(x) \leq a\} = \bigcap_{\alpha \in I} \{x \in X \mid f_\alpha(x) \leq a\}.$$

(b) Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, đặt

$$A_n = \{x \in X \mid f(x) \leq n\}$$

rồi tiến hành chứng minh như Bài 3.3.

3.13. Độc giả tự giải.

4.1.

(a) Dễ dàng chứng minh được rằng với giả thiết đã cho, f là phép đồng phôi và $(x_n)_n$ là dãy Cauchy trong X khi và chỉ khi $(f(x_n))_n$ là dãy Cauchy trong Y.

Giả sử X là không gian đủ và $(y_n)_n$ là dãy Cauchy trong Y. Khi đó với mỗi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại $x_n \in X$ sao cho $y_n = f(x_n)$. Theo nhận xét trên, $(x_n)_n$ là dãy Cauchy trong X đủ nên $x_n \to x_0 \in X$. Do đó $y_n = f(x_n) \to f(x_0) \in Y$.

Ngược lại, nếu Y là không gian đủ và $(x_n)_n$ là dãy Cauchy trong X thì $(y_n)_n$ là dãy Cauchy trong Y với $y_n = f(x_n)$, mọi $n \in \mathbf{N}$. Do đó $y_n = f(x_n) \to y_0 \in Y$. Lúc này $x_n = f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$ khi $n \to \infty$. Vậy X là không gian đủ.

(b) Vì f là đồng phôi nên khẳng định (b) được suy ra bằng một lập luận tương tự như trong phép chứng minh (a), sử dụng định nghĩa của không gian compact (cũng có thể sử dụng Định lí Heine-Borel về phủ mở) □

4.2. Hướng dẫn. Sử dụng Định lí Heine-Borel.

4.3.

(a) $(x_n)_n$ là dãy Cauchy trong $[a, b]$ (là không gian đủ) nên hội tụ về một phần tử $x_0 \in [a, b]$. Do đó, $f(x_n) \to f(x_0)$. Vậy $(f(x_n))_n$ là dãy Cauchy trong $\mathbf{R}$.

(b) Vì $[a, b]$ là không gian compact và A là tập đóng trong $[a, b]$ nên A là tập compact trong $[a, b]$. Do đó $f(A)$ compact

trong $\mathbf{R}$ và vì vậy, đóng trong $\mathbf{R}$.

(c) Xét $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$. Ta có $(a,b]$ là tập mở trong $[a,b]$ nhưng $f((a,b]) = (a,b]$ không phải là tập mở trong $\mathbf{R}$ □

4.4.

(a) Rõ ràng là $F_{n+1} \subset F_n$ và do đó $\overline{F}_{n+1} \subset \overline{F}_n$, mọi $n \in \mathbf{N}$. Ngoài ra, với mọi tập con J hữu hạn của $\mathbf{N}$,

$$\bigcap_{i\in J} \overline{F}_i \supset \bigcap_{i\in J} F_i = F_{n_0} \neq \emptyset,$$

trong đó $n_0 = \max\{i \mid i \in J\}$. Vậy $(\overline{F}_n)_n$ là họ tập đóng có tâm trong không gian compact X và do đó có giao không rỗng, nghĩa là $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n \neq \emptyset$.

Nếu X là không gian đủ mà không là compact thì kết luận trên không còn đúng nữa. Xin độc giả tự tìm thí dụ minh họa.

(b) Nếu tồn tại $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ sao cho $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$ thì với mọi $m \in \mathbf{N}$, $x_{n_k} \in F_m$ khi $k \geq m$. Do vậy $x \in \overline{F}_m$, mọi $m \in \mathbf{N}$ và do đó $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n$.

Ngược lại, nếu $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n$ thì $x \in \overline{F}_n$, mọi n. Khi đó tồn tại $x_{n_1} \in F_1$ sao cho $d(x_{n_1}, x) < \frac{1}{2}$, tồn tại $x_{n_2} \in F_{n_1+1}$ để cho $d(x_{n_2}, x) < \frac{1}{2^2}$ (rõ ràng là $n_1 < n_2$). Bằng quy nạp, tồn tại $x_{n_{k+1}} \in F_{n_k+1}$ sao cho $d(x_{n_{k+1}}, x) < \frac{1}{2^{k+1}}$. Như vậy ta được dãy con $(x_{n_k})_k$ của dãy $(x_n)_n$ mà $x_{n_k} \to x$ khi $k \to \infty$, là điều phải chứng minh □

4.5. Hướng dẫn. Xét họ tập $(K_n)_n$ mà $K_1 = A_1, K_2 = A_1 \cap A_2, \ldots, K_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, $n \in \mathbf{N}$.

4.6. Độc giả tự giải.

4.7. Độc giả tự giải.

4.8.

(a) Hướng dẫn. Hàm số $\phi(x) = d(x,F)$ liên tục trên E

nên đạt được giá trị bé nhất trên E, nghĩa là tồn tại $x_0 \in E$ sao cho $d(x_0, F) = \phi(x_0) = \inf_{x \in E} \phi(x)$. Dễ chứng minh được rằng $\inf_{x \in E} \phi(x) = d(E, F)$. Từ đây, $d(x_0, F) = d(E, F)$.

(b) Từ định nghĩa của supremum, tồn tại các dãy $(x_n)_n$, $(y_n)_n \subset E$ sao cho $d(x_n, y_n) \to \delta(E)$. Vì E là compact nên có dãy con $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$, $x_0 \in E$ sao cho $x_{n_k} \to x_0$, khi $k \to \infty$. Cũng do E compact, tồn tại $(y_{n_{k_j}})_j \subset (y_{n_k})_k$ và $y_0 \in E$ sao cho $y_{nk_j} \to y_0$ khi $j \to \infty$. Từ tính liên tục của mêtric d ta được

$$d(x_0, y_0) = \lim_{j \to \infty} d(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) = \delta(E).$$

(c) Giả sử $d(E, F) = 0$. Khi đó tồn tại các dãy $(x_n)_n \subset E$ và $(y_n)_n \subset F$ sao cho

$$d(x_n, y_n) \to \inf_{x \in E, y \in F} d(x, y) = d(E, F) = 0, \ n \to \infty.$$

Vì E là compact nên tồn tại $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$, sao cho $x_{n_k} \to x_0 \in E$ khi $k \to \infty$. Lúc này vì

$$d(y_{n_k}, x_0) \leq d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) \to 0 \text{ khi } k \to \infty$$

nên $y_{n_k} \to x_0$. Mặt khác, vì F là đóng nên $x_0 \in F$. Do đó $x_0 \in E \cap F$, nghĩa là $E \cap F \neq \emptyset$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $E \cap F = \emptyset$. Vậy $d(E, F) > 0$. Đặt $\alpha = d(E, F) > 0$ ta được điều phải chứng minh □

4.9. Hướng dẫn. Gọi $\alpha = \sup_{x \in X} f(x)$. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, đặt

$$F_n = \{x \in X \mid \leq \alpha + \frac{1}{n}\}.$$

Khi đó F_n đóng, $F_n \neq \emptyset$ với mọi $n \in \mathbf{N}$ và $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Nếu

$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ thì $f(x_0) = \sup_{x \in X} f(x)$.

4.10.

Giả sử ngược lại tồn tại phép đồng phôi $f : [0,1) \to (0,1)$. Vì $(0,1)$ là tập liên thông của $[0,1)$ nên $f((0,1))$ là tập liên thông trong $(0,1)$. Tuy nhiên $f((0,1)) = (0,1) \setminus f(0)$ là tập không liên thông. Mâu thuẫn này chứng tỏ rằng $[0,1)$ không đồng phôi với $(0,1)$ □

4.11.

Do A không đóng nên tồn tại $x_0 \in \overline{A} \setminus A$. Khi đó tồn tại dãy $(x_n)_n \subset A$ sao cho $x_n \to x_0$. Vì $x_0 \neq x_n$ với mọi $n = 1, 2, ...$ cho nên một trong hai tập hợp $\{n \in \mathbf{N} \mid x_n < x_0\}$, $\{n \in \mathbf{N} \mid x_n > x_0\}$ phải có một tập vô hạn, chẳng hạn, tập hợp $\{n \in \mathbf{N} \mid x_n < x_0\}$ vô hạn. Khi đó có một dãy con $(x_{n_k})_k$ của $(x_n)_n$ mà $x_{n_k} < x_0$ với mọi $k = 1, 2, ...$ và $x_{n_k} \to x_0$ khi $k \to \infty$.

Đặt $V_0 = (x_0, \infty)$ và $V_k = (-\infty, \frac{x_0 + x_{n_k}}{2})$. Thế thì

$$A \subset \mathbf{R} \setminus \{x_0\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_k.$$

Tuy nhiên $(V_k)_{k \in \mathbf{N}}$ không có họ con hữu hạn nào phủ A. Thật vậy, nếu ngược lại thì sẽ có số tự nhiên m sao cho $A \subset \bigcup_{k=0}^{m} V_k$. Vì $\frac{x_0 + x_{n_k}}{2} < x_0$ với mọi $k = 1, 2, ..., m$ và vì $x_n \to x_0$ nên phải có số tự nhiên n để $\frac{x_0 + x_{n_k}}{2} < x_n$ với mọi $k = 1, 2, ..., m$, tức là $x_n \notin \bigcup_{k=0}^{m} V_k$ mâu thuẫn với $A \subset \bigcup_{k=0}^{m} V_k$ □

4.12.

Rõ ràng là $f(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n)$. Ta chỉ còn phải chứng minh $f(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n) \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n)$. Giả sử $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n)$. Khi đó với mọi $n \in \mathbf{N}$, $x \in f(K_n)$ và tồn tại $x_n \in K_n$ sao cho $f(x_n) = x$. Vì X compact nên có dãy con $(x_{n_k})_k \subset$

$(x_n)_n$, $x_{n_k} \to x_0 \in X$. Với mỗi $p \in \mathbf{N}$, $x_{n_k} \in K_p$ khi $k \geq p$. Vì $x_{n_k} \to x_0$ khi $k \to \infty$ và K_p đóng nên ta có $x_0 \in K_p$. Do đó, $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ và $x = f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ khi $k \to \infty$. Vậy $x = f(x_0) \in f(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n)$ và ta đã chứng minh được $\bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n) \subset f(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n)$ □

4.13. Độc giả tự giải.

4.14. Độc giả tự giải.

5.1.

Gọi $E = \{x \in [a,b] \mid \mathcal{A}$ bị chặn điểm tại $x\}$. Khi đó $E \neq \emptyset$ vì $x_0 \in E$. Ta sẽ chứng minh rằng E vừa là tập mở, vừa là tập đóng trong $[a,b]$ và do $[a,b]$ liên thông nên $E = [a,b]$.

i) Chứng minh E đóng. Giả sử $y \in \overline{E}$. Vì $\mathcal{A}$ là họ hàm đồng liên tục nên tồn tại lân cận V của y sao cho

$$|f(x) - f(y)| < 1, \quad \forall x \in V, \ \forall f \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

Do $y \in \overline{E}$, $V \cap E \neq \emptyset$. Cố định $\overline{x} \in V \cap E$. Vì $\overline{x} \in E$ nên tồn tại số $M > 0$ sao cho $\sup\{|f(\overline{x})| \mid f \in \mathcal{A}\} \leq M$. Kết hợp với (1) ta có

$$|f(y)| \leq |f(\overline{x})| + 1 \leq M + 1. \ \forall f \in \mathcal{A},$$

hay $y \in E$. Vậy E là tập đóng.

ii) Chứng minh E mở. Giả sử $y \in E$ và M là số dương sao cho $|f(y)| \leq M$ với mọi $f \in \mathcal{A}$. Tồn tại lân cận W của y để

$$|f(x) - f(y)| < 1, \ \forall x \in W, \ \forall f \in \mathcal{A}.$$

Từ đó,

$$|f(x)| \leq |f(y)| + 1 \leq M + 1 \ \forall x \in W, \ \forall f \in \mathcal{A}.$$

Như vậy $W \subset E$ và E là tập mở. Do đó $E = [a,b]$. Theo Định

lí Azelà-Ascoli, $\mathcal{A}$ là tập compact tương đối trong $C_{[a,b]}$ □

5.2.

Giả sử $\epsilon > 0$. Với mỗi $x \in X$, do $(f_n)_n$ đồng liên tục tại x và f liên tục nên có lân cận mở V_x của x sao cho .

(i) $|f_n(y) - f_n(x)| < \epsilon$ với mọi $y \in V_x$, mọi $n \in \mathbf{N}$ và

(ii) $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ với mọi $y \in V_x$.

Rõ ràng $(V_x)_{x \in X}$ là một phủ mở của X. Vì X compact nên có $x_1, x_2, ..., x_k \in X$ sao cho $X = \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i}$. Do A trù mật trong X nên tồn tại $z_i \in A \cap V_{x_i}$, $1 \leq i \leq k$. Lấy bất kì $y \in X$. Khi đó $y \in V_{x_j}$ với một j nào đó. Vì $f_n(z_j) \to f(z_j)$ nên có số tự nhiên n_j sao cho $|f_n(z_j) - f(z_j)| < \epsilon$ với mọi $n \geq n_j$. Nhờ (ii) ta có

$$|f(z_j) - f(y)| \leq |f(z_j) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| < 2\epsilon.$$

Từ đó,

$$\begin{aligned} |f_n(y) - f(y)| \leq\ & |f_n(y) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_n(z_j)| \\ & + |f_n(z_j) - f(z_j)| + |f(z_j) - f(x_j)| \\ & + |f(x_j) - f(y)| < 5\epsilon \quad \forall n \geq n_j. \end{aligned}$$

Do đó nếu gọi $n_0 = \max_{1 \leq i \leq n} n_i$ thì ta sẽ có $|f_n(y) - f(y)| < 5\epsilon$ với mọi $y \in X$ và mọi $n \geq n_0$. Vậy $d(f_n, f) \leq 5\epsilon$ khi $n \geq n_0$ hay $(f_n)_n$ hội tụ tới f trong $C(X)$ □

5.3.

(a) Theo giả thiết $\mathcal{A}$ là tập hoàn toàn bị chặn và do đó, bị chặn trong $C_{[a,b]}$. Vậy tồn tại $M > 0$ sao cho $\mathcal{A} \subset B(0, M)$ hay $|f(x)| \leq M$ với mọi $x \in [a, b]$ và mọi $f \in \mathcal{A}$.

(b) Giả sử $\epsilon > 0$. Theo giả thiết, với mọi $f \in \mathcal{A}$, tồn tại $i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ sao cho

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \varphi_i(x)| = d(f, \varphi_i) < \frac{\epsilon}{3}. \qquad (*)$$

Vì với mỗi $i = 1, 2, \cdots, n$, φ_i liên tục đều trên $[a, b]$ nên tồn tại $\delta_i > 0$ sao cho $|\varphi_i(x) - \varphi_i(x')| < \frac{\epsilon}{3}$ với mọi $x, x' \in [a, b]$, $|x - x'| < \delta_i$. Đặt $\delta = \min\limits_{1 \le j \le n} \delta_j$. Khi đó với mọi $f \in \mathcal{A}$, có $i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ sao cho $(*)$ nghiệm đúng và do đó với mọi $x, x' \in [a, b]$ mà $|x - x'| < \delta$ ta đều có

$$|f(x) - f(x')| \le |f(x) - \varphi_i(x)| + |\varphi_i(x) - \varphi_i(x')| + \\ + |\varphi_i(x') - f(x')| < \epsilon.$$

Vậy $\mathcal{A}$ đồng liên tục đều trên $[a, b]$ □

5.4.

Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý. Do $\mathcal{A}$ đồng liên tục nên với mỗi $x \in [a, b]$ tồn tại $\delta_x > 0$ sao cho nếu $y \in [a, b], |y - x| < \delta_x$ thì $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ với mọi $f \in \mathcal{A}$. Vì $[a, b] \subset \bigcup\limits_{x \in [a,b]} B(x, \frac{1}{2}\delta_x)$ và $[a, b]$ compact nên tồn tại $x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$ sao cho $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i})$. Đặt $\delta = \frac{1}{2} \min\limits_{1 \le i \le n} \delta_{x_i}$. Giả sử $x, y \in [a, b]$ thỏa mãn $|y - x| < \delta$. Khi đó $x \in B(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i})$ với một i nào đó và ta có

$$|y - x_i| \le |y - x| + |x - x_i|, \ \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_i} \le \delta_{x_i}.$$

Do vậy,

$$|f(x) - f(x_i)| < \epsilon, \quad |f(y) - f(x_i)| < \epsilon, \text{ mọi } f \in \mathcal{A}.$$

Điều này cho

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| \\ < 2\epsilon, \text{ mọi } f \in \mathcal{A}.$$

Vậy $\mathcal{A}$ đồng liên tục đều □

5.5.

Giả sử ϵ là một số dương tùy ý. Do f liên tục trên tập

compact X trong $\mathbf{R}^2$ nên liên tục đều trên X. Vì vậy tồn tại $\delta > 0$ sao cho mọi $(x, y), (x', y') \in X$,

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} < \delta \text{ thì } |f(x,y) - f(x',y')| < \epsilon.$$

Từ đó, với $x, x', y \in [0,1]$ sao cho $|x - x'| < \delta$ ta luôn có

$$|f_y(x) - f_y(x')| = |f(x,y) - f(x',y)| < \epsilon.$$

Vậy họ các hàm F đồng liên tục đều trên $[0,1]$ □

5.6. Hướng dẫn. Dựa vào tính bị chặn đều của họ $(f_n)_n$ hãy chứng minh rằng họ $\mathcal{A} = \{g_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ bị chặn đều và đồng liên tục đều trên $[a, b]$ rồi áp dụng Định lí Azelà-Ascoli.

5.7.

Từ giả thiết ta suy ra rằng với mọi đa thức $P(x)$ ta đều có $\int_0^1 P(x)f(x)dx = 0$. Lấy tùy ý $\epsilon > 0$. Vì f liên tục trên $[0,1]$ nên bị chặn trên đoạn này, nghĩa là có số $K > 0$ sao cho $|f(x)| \leq K$ với mọi $x \in [0,1]$. Theo Định lí Weierstrass, tồn tại đa thức $P(x)$ sao cho

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |P(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{K}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^1 f^2(x)dx &= \int_0^1 [f^2(x) - P(x)f(x)]dx \\ &\leq \int_0^1 |f(x)(f(x) - P(x))|dx = \int_0^1 |f(x)||f(x) - P(x)|dx \\ &\leq \int_0^1 K|f(x) - P(x)|dx \leq \int_0^1 \epsilon dx = \epsilon. \end{aligned}$$

Do ϵ là tuỳ ý, $\int_0^1 f^2(x)dx = 0$ và vì vậy, $f(x) = 0$ với mọi $x \in [0,1]$ (độc giả hãy lí giải khẳng định cuối cùng này) □

5.8.

Giả sử $(f_n)_n \subset F$, $f_n \to f$ trong $C_{[a,b]}$. Cho $n \to \infty$ trong bất đẳng thức

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \beta|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in [a, b],$$

ta được

$$|f(x) - f(y)| \leq \beta|x - y|^\alpha, \ \forall x, t \in [a, b].$$

Tương tự, $|f(a)| \leq \gamma$. Vậy $f \in F$ và F là tập đóng.

Với mọi $f \in F$, mọi $x \in [a, b]$, từ giả thiết ta có

$$|f(x)| \leq |f(a)| + \beta|x - a|^\alpha \leq \gamma + (b - a)^\alpha.$$

Do đó F bị chặn đều trên $[a, b]$.

Mặt khác, với bất kì $\epsilon > 0$, chọn $\delta > 0$ sao cho $\beta\delta^\alpha < \epsilon$. Khi đó với mọi $f \in F$ và mọi $x, y \in [a, b]$ mà $|x - y| < \delta$ ta được

$$|f(x) - f(y)| \leq \beta|x - y|^\alpha \leq \beta\delta^\alpha < \epsilon.$$

Vậy F là đồng liên tục đều trên $[a, b]$ nên theo Định lí Arzelà-Ascoli, F là compact tương đối. Vì F đóng nên F compact. □

Bài tập ôn.

O1. Hướng dẫn.

(a) Bất đẳng thức tam giác được suy ra từ (γ) và điều kiện $d(x,y) \geq 0$, mọi $x, y \in E$.

(b) Giả sử $d(x,y) < d(y,z)$. Từ (γ) ta suy ra

$$d(x,z) \leq d(y,z).$$

Mặt khác, từ

$$d(y,z) \leq \max\{d(x,y), d(x,z)\}$$

ta được $d(y,z) \leq d(x,z)$.

(c) (i). $B(x,r)$ đóng: Giả sử $(a_n)_n \subset B(x,r)$, a_n raa khi $n \to \infty$. Có $p > 0$ sao cho $d(a_p, a) < \frac{r}{2}$. Do đó

$$d(x,a) \leq \max\{d(x,o_p), d(a_p,a)\} < r.$$

Vậy $a \in B(x,r)$ hay $B(x,r)$ đóng.

Phần còn lại được chứng minh nhờ vào (γ).

(ii) $y \in \overline{B}(x,r)$. Hãy chứng tỏ $B(y, \frac{r}{2}) \subset \overline{B}(x,r)$.

(d) $(x_n)_n \subset (E,d)$ mà $\lim\limits_{n\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Khi đó

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 > 0 \ : \ \forall m \geq n_0, d(x_m, x_{m+1}) < \epsilon.$$

Lúc này $\forall m, n \geq n_0$ (giả sử $n > m$):

$$d(x_m, x_n) \leq \max\{d(x_m, x_{m+1}), d(x_{m+1}, x_{m+2}), \ldots, \ldots, d(x_{n-1}, x_n)\} < \epsilon.$$

O2. Độc giả tự giải.

O3. Độc giả tự giải.

O4. Độc giả tự giải.

O5. Độc giả tự giải.

O6. Độc giả tự giải.

O7. Hướng dẫn. Xét ánh xạ φ: $X \to G(f)$ cho bởi $\varphi(x) = (x, f(x))$. Rõ ràng φ là một song ánh. Giả sử $x_n \to x_0$ khi $n \to \infty$. Do f liên tục nên $f(x_n) \to f(x_0)$. Do đó $\varphi(x_n) = (x_n, f(x_n))(x_0, f(x_0)) = \varphi(x_0)$. Vậy φ liên tục. Ta có $\varphi^{-1}((x, f(x)) = x$ với mọi $(x, f(x)) \in G(f)$ nên

$$\begin{aligned} d(\varphi^{-1}((x, f(x)), \varphi^{-1}((y, f(y))) &= d(x, y) \\ &\leq d(x, y) + d(f(x), f(y)) \\ &= d((x, f(x)), (y, f(y))) \end{aligned}$$

với mọi $(x, f(x)), (y, f(y)) \in G(f)$. Vậy φ^{-1} liên tục và φ là phép đồng phôi.

O8. Hướng dẫn. Để làm phản thí dụ cho khẳng định cuối cùng của (b), có thể lấy $f(x) := x^3, x \in \mathbf{R}$.

O9. Hướng dẫn.

(a) Chứng minh như đối với $\mathbf{R}^n$.

(b) (i) Để kiểm tra bất đẳng thức tam giác đối với d, hãy sử dụng tính đơn điệu tăng của hàm $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$, $t > 0$ (xem Bài tập 1.1).

(ii) Giả sử $x_n = (\xi_i^n)_i$, $x = (\xi_i)_i \in X$ và $d(x_n, x) \to 0$ khi $n \to \infty$. Khi đó với mọi $\epsilon > 0$, có $n_0 > 0$ sao cho $n \geq n_0$ thì

$$d(x_n, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(\xi_i^n, \xi_i)}{1 + d_i(\xi_i^n, \xi_i)} < \epsilon.$$

Từ đó, với mỗi i cố định,

$$\frac{1}{2^i} \frac{d_i(\xi_i^n, \xi_i)}{1 + d_i(\xi_i^n, \xi_i)} < \epsilon$$

với mọi $n \geq n_0$. Do đó $\lim_{n\to\infty} d_i(\xi_i^n, \xi_i) = 0$ hay $(\xi_i^n)_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ đến ξ_i trong (X_i, d_i).

Giả sử $\xi_i^n \to \xi_i$ trong (X_i, d_i) khi $n \to \infty$, với mọi $i \in \mathbf{N}$. Lấy tùy ý $\epsilon > 0$. Ta chọn $m \in \mathbf{N}$ sao cho $\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\epsilon}{2}$. Lúc này

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(\xi_i^n, \xi_i)}{1 + d_i(\xi_i^n, \xi_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(\xi_i^n, \xi_i)}{1 + d_i(\xi_i^n, \xi_i)} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(\xi_i^n, \xi_i)}{1 + d_i(\xi_i^n, \xi_i)} \\ &< \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(\xi_i^n, \xi_i)}{1 + d_i(\xi_i^n, \xi_i)} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Vì với mọi $i = 1, 2..., m$, $d_i(\xi_i^n, \xi_i) \to 0$ khi $n \to \infty$ nên có n_0 (phụ thuộc vào ϵ) sao cho $n \geq n_0$ thì

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(\xi_i^n, \xi_i)}{1 + d_i(\xi_i^n, \xi_i)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Như vậy khi $n \geq n_0$ ta có $d(x_n, x_0) < \epsilon$.

O10. Độc giả tự giải.

O11. Hướng dẫn. Xem Bài tập 3.5.

O12.

(a) Rõ ràng nếu f liên tục tại $x \in A$ thì $f_{|A}$ liên tục tại x. Ngược lại, giả sử $f_{|A}$ liên tục tại $x \in A$. Nếu V là lân cận mở của $f(x)$ thì tồn tại một tập U mở trong A (và do đó, mở trong X), $U \ni x_0$ và sao cho $f(U) \subset V$. Vậy f liên tục tại x.

(b) Giả sử $f_{|A}$ và $f_{|B}$ liên tục tại $x_0 \in A \cap B$. Nếu V là một lân cận mở của $f(x_0)$ thì tồn tại các tập mở U_1, U_2 của X và là những lân cận của x_0, sao cho $f(U_1 \cap A) \subset V$ và $f(U_2 \cap B) \subset V$. Đặt $U = U_1 \cap U_2$ thì U là một lân cận mở của x_0. Do $X = A \cup B$ ta có $U = (U \cap A) \cup (U \cap B) \subset (U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap B)$. Từ đó, $f(U) \subset f(U_1 \cap A) \cup f(U_2 \cap B) \subset V \cup V = V$. Vậy f liên tục tại x_0.

(c) Giả sử A và B là hai tập đóng, $A \cup B = X$ và giả sử $f_{|A}$ và $f_{|B}$ liên tục. Lấy bất kì $x \in X$. Ta có thể giả sử, chẳng hạn, $x \in A$. Nếu $x \in A \cap B$ thì theo câu (b) ta có f liên tục tại x. Nếu $x \notin B$ thì $x \in X \setminus B$. Vì $X \setminus B$ mở trong X, chứa trong A (do $A \cup B = X$) và vì $f_{|A}$ liên tục tại x nên áp dụng (a) ta được $f_{|X \setminus B}$ liên tục tại x. Cũng từ kết quả câu (a), f liên tục tại x □

O13. Hướng dẫn. Xem Bài tập 2.11. Để chứng minh f_2 liên tục, ta sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{|a| + |b|}{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}} \leq \frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{|b|}{\sqrt{1+b^2}} \leq 1 + 1 = 2.$$

Với mọi $x, y \in C^1$,

$$\begin{aligned} |f_2(x) - f_2(y)| &= \left| \int_0^1 \sqrt{1 + (x'(t))^2}\,dt - \sqrt{1 + (y'(t))^2}\,dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \sqrt{1 + (x'(t))^2} - \sqrt{1 + (y'(t))^2} \right| dt \\ &= \int_0^1 \frac{|(x'(t))^2 - (y'(t))^2|}{\sqrt{1 + (x'(t))^2} + \sqrt{1 + (y'(t))^2}} dt \end{aligned}$$

MATH-EDUCARE

$$= \int_0^1 \frac{|x'(t) - y'(t)| \cdot (|x'(t)| + |y'(t)|)}{\sqrt{1 + (x'(t))^2} + \sqrt{1 + (y'(t))^2}} dt$$

$$\leq \int_0^1 2|x'(t) - y'(t)|dt \leq 2d(x, y).$$

O14. Hướng dẫn. Xét ánh xạ $f : (\mathbf{R}^n, \rho) \to (\mathbf{R}^n, \rho)$ cho bởi $f(x) = Ax + b$ trong các trường hợp như sau: (i) $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$; (ii) $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$; (iii) ρ là khoảng cách Euclide (mêtric thông thường). Trong các trường hợp này f đều là ánh xạ co.

O15. Độc giả tự giải.

O16. Độc giả tự giải.

O17. Hướng dẫn.

(a) Có thể chứng minh bằng phản chứng hoặc lập luận như sau. $x_0 \in A^c$ mở nên tồn tại $r > 0$ để $B(x_0, r) \cap A = \emptyset$. Khi đó mọi $y \in A, d(x_0, y) \geq r$ nên $d(x_0, A) \geq r > 0$.

(b) Có thể sử dụng tính chất của infimum hoặc xét hàm liên tục $d(x_0, .) : X \to \mathbf{R}$. Để ý tập A là compact.

(c) Giả sử $x_0 \in \mathbf{R}^n; A \neq \emptyset$, là tập đóng trong $\mathbf{R}^n$. Ta chứng minh khẳng định ở câu (b) cũng đúng, nghĩa là tồn tại $y_0 \in A$ để $d(x_0, y_0) = d(x_0, A)$.

Nếu $x_0 \in A$ thì chỉ việc chọn $y_0 = x_0$. Nếu $x_0 \notin A$ thì theo (a), $d(x_0, A) > 0$. Lấy tuỳ ý $b \in A$ và gọi $r := d(x_0, b) \geq d(x_0, A) > 0$, $C = A \cap \overline{B}(x_0, r)$. Để ý rằng C compact trong $\mathbf{R}^n$ nên theo (b), tồn tại $y_0 \in C$ sao cho $d(x_0, y_0) = d(x_0, C) \leq r$. Vì $x \in A \backslash C$ thì $d(x_0, x) > r$ nên $d(x_0, C) = d(x_0, A)$. Ta có điều phải chứng minh.

(d) Để làm ví dụ có thể xét $\mathbf{R}^2$ với mêtric

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, x = (x_1, x_2),$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

$y = (y_1, y_2)$ và hình cầu $\overline{B} := \overline{B}((2,0),1)$, $x_0 = (0,0)$. Lúc này

$$d_\infty(x_0, \overline{B}) = 1 = d_\infty(x_0, a),$$

với mọi $a \in \overline{B}$ với $a = (1, a_2)$ và $|a_2| \leq 1$.

O18.

(a) Phép chứng minh là đơn giản, tương tự như phép chứng minh đối với không gian $C_{[a,b]}$. Đề nghị độc giả tự chứng minh.

(b) Với mỗi $x \in X$ cố định,

$$|f_x(y)| = |d(y,x) - d(y,a)| \leq d(x,a), \quad \forall y \in X.$$

Do đó f_x bị chặn trên X và nghĩa là $f_x \in B(X)$ mọi $x \in X$.

(c) Vì với mỗi $x, y \in X$ ta đều có

$$\begin{aligned} d(\theta(x), \theta(y)) = d(f_x, f_y) &= \sup_{z \in X} |f_x(z) - f_y(z)| \\ &= \sup_{z \in X} |d(z,y) - d(z,x)| = d(x,y) \end{aligned}$$

(để ý rằng $|d(z,y) - d(z,x)| \leq d(x,y)$ và dấu bằng trong bất đẳng thức này xảy ra khi lấy $z = y$) nên X đẳng cự với không gian con $\theta(X)$ của $B(X)$. Lại vì không gian $B(X)$ là đầy đủ nên bao đóng của $\theta(X)$, $\overline{\theta(X)}$, cũng đầy đủ. Như vậy $\hat{X} := \overline{\theta(X)}$ là một đầy đủ hoá của X □

O19. Độc giả tự giải.

O20. Hướng dẫn. Ánh xạ g: $I \to \mathbf{R}^2$ cho bởi $g(x) = (x, f(x))$ với mọi $x \in I$, là liên tục. Vậy

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in I\} = g(I)$$

là tập liên thông của $\mathbf{R}^2$.

O21. Độc giả tự giải.

O22.

Ta có

$$\begin{aligned}(x_0 \in \partial A) &\Leftrightarrow (\forall U = U(x_0), U \cap A \neq \emptyset \text{ và } U \cap A^c \neq \emptyset)\\ &\Leftrightarrow (x_0 \in \overline{A} \text{ và } x_0 \in \overline{A^c})\\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{A^c}.\end{aligned}$$

Do đó $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. Bây giờ với các giả thiết của đề bài, ta chứng minh $B \cap \partial A \neq \emptyset$. Giả sử ngược lại rằng $B \cap \partial A = \emptyset$. Thế thì

$$(B \cap \overline{A}) \cap (B \cap \overline{A^c}) = B \cap \partial A = \emptyset.$$

Mà $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c) \subset (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A^c}) \subset B$, trong đó $B \cap \overline{A}$ và $B \cap \overline{A^c}$ là hai tập đóng không rỗng của B nên B không liên thông. Mâu thuẫn này chứng tỏ $A \cap \partial A \neq \emptyset$ □

O23. Hướng dẫn. Tương tự Bài 4.9.

O24. Độc giả tự giải.

O25. Độc giả tự giải.

O26. Độc giả tự giải.

O27. Độc giả tự giải.

O28. Độc giả tự giải.

O29. Hướng dẫn. (c) Kết luận sẽ không còn đúng nếu B chỉ được giả thiết là đóng chứ không compact. Chẳng hạn, có thể lấy

$$A = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbf{R}\} \text{ và } B = \{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R}\}$$

hoặc

$$A = \mathbf{N} \text{ và } B = \left\{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}, n \geq 2\right\}.$$

O30. Độc giả tự giải.

WWW.MATHEDUCARE.COM

O31. Độc giả tự giải.

O32. Độc giả tự giải.

O33. Hướng dẫn.

Cách 1. Xét ánh xạ $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ xác định bởi $g(t) := d(f(t), x_0) - r$.

Cách 2. Để ý rằng $f(\mathbf{R})$ là tập liên thông trong $\mathbf{R}^2$ và biên của $B(x_0, r)$ chính là $S^1(x_0, r)$ rồi sử dụng Bài tập O22.

O34. Hướng dẫn.

(c) Giả sử $(A_n)_n$ là một dãy Cauchy trong $\mathcal{F}(X)$.

* Ta chứng minh rằng $\cap_n \overline{\cup_{m \geq n} A_m} \neq \emptyset$. Lấy tuỳ ý $\epsilon > 0$. Với mỗi số nguyên $k = 0, 1, 2, \ldots$, tồn tại N_k sao cho $m, n \geq N_k$ kéo theo $h(A_n, A_m) < 2^{-k}.\epsilon$. Gọi $(n_k)_k$ là dãy đơn điệu tăng ngặt sao cho $n_k \geq N_k$. Lấy $x_0 \in A_{n_0}$. Giả sử đã chọn được $x_0, x_1, x_2, \ldots x_k$ với tính chất $x_i \in A_{n_i}$, $d(x_i, x_{i+1}) < 2^{-i}.\epsilon$. Khi đó x_{k+1} được chọn trong A_{k+1} sao cho thoả mãn $d(x_k, x_{k+1}) < 2^{-k}.\epsilon$. Dãy $(x_k)_k$ là dãy Cauchy trong X. Gọi x là giới hạn của nó. Khi đó $x \in \cap_n \overline{\cup_{m \geq n} A_m}$.

* Điểm x nhận được ở trên rõ ràng thoả mãn $d(x_0, x) \leq 2\epsilon$. Như vậy ta đã chứng minh được rằng mọi $n_0 \geq N_0$ và mọi $x_0 \in A_{n_0}$, tồn tại $x \in A := \cap_n \overline{\cup_{m \geq n} A_m}$ sao cho $d(x_0, x) \leq 2\epsilon$. Do đó $e(A_{n_0}, A) \leq 2\epsilon$ mọi $n_0 \geq N_0$.

* Để chứng minh $h(A_n, A) \to 0$ (khi $n \to \infty$) ta chứng minh $e(A, A_n) \to 0$. Với $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại N sao cho $n, m \geq N$ thì $h(A_m, A_n) \leq \epsilon$. Lấy $x \in A$ thì $x \in \overline{\cup_{m \geq N} A_m}$. Tồn tại $n_0 \geq N$ và $y \in A_{n_0}$ sao cho $d(x, y) \leq \epsilon$. Mọi $m \geq N$ ta có

$$d(x, A_m) \leq d(x, A_{n_0}) + h(A_{n_0}, A_m) \leq 2\epsilon.$$

Vậy $e(A, A_m) \leq 2\epsilon$.

(d) Giả sử $(A_n)_n$ là một dãy trong $\mathcal{F}_{tb}(X)$ và hội tụ về $A \in \mathcal{F}(X)$. Mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại n sao cho $e(A, A_n) < \epsilon$ và

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$ sao cho những hình cầu tâm x_i bán kính ϵ phủ A_n. Khi đó những hình cầu tâm x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, x_p$ bán kính 2ϵ phủ A.

O35. Độc giả tự giải.

O36. Hướng dẫn.

(a) Để ý rằng

$$0 \leq d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| < +\infty.$$

(b) Giả sử $(x_n)_n$ là một dãy Cauchy trong l^1, $x_n = (\xi_n^k)_k$. Khi đó $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 > 0$ sao cho mọi $p, q \geq n_0$ thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^p - \xi_n^q| < \epsilon. \qquad (*)$$

Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, $(\xi_n^k)_k$ là một dãy Cauchy các số thực. Gọi $\xi_n := \lim_{k \to \infty} \xi_n^k$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Từ đây và $(*)$ ta đi đến

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^p - \xi_n| \leq \epsilon, \quad \text{mọi } p \geq n_0. \qquad (**)$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|\xi_n^{n_0} - \xi_n| + |\xi_n^{n_0}|) \leq \epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^{n_0}| < +\infty,$$

nghĩa là $x := (\xi_n)_n \in l^1$. Kết luận được suy ra từ $(**)$.

(c) Đặt

$$M_k = \{(\xi_n)_n \in l^1 \mid \xi_n \in \mathbf{Q} \text{ khi } 1 \leq n \leq k,\ \xi_n = 0 \text{ khi } n > k\},$$

$k = 1, 2, 3, \ldots$. Khi đó $M := \cup_{k=1}^{\infty} M_k$ là tập đếm được và trù mật trong l^1.

O37. Độc giả tự giải.

O38. Độc giả tự giải.

O39. Hướng dẫn.

(a) Không gian E là compact nên dãy $(f^n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ có một dãy con $(f^{n_k})_k$ hội tụ và do đó dãy con này là một dãy Cauchy. Lúc này với $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại $k_0 > 0$ sao cho mọi $k, l \geq k_0$ thì $d(f^{n_k}(a), f^{n_l}) \leq \epsilon$. Ta chứng minh được

$$d(a, f^{n_k - n_{k_0}}(a)) \leq d(f(a), f^{n_k - n_{k_0}+1}(a)) \leq$$
$$\leq \cdots \leq d(f^{n_k}(a), f^{n_{k_0}}(a)) \leq \epsilon.$$

(b) Xét ánh xạ $F : (x, y) \mapsto (f(x), f(y))$ từ không gian compact (hãy chứng minh) $E \times E$ vào chính nó. Áp dụng kết qủa câu (a).

O40. Độc giả tự giải.

O41. Độc giả tự giải.

Chương 2

LÍ THUYẾT ĐỘ ĐO

A. Tóm tắt lí thuyết

§1. NỬA VÀNH, VÀNH VÀ ĐẠI SỐ CÁC TẬP

Trong chương này khi nói đến họ tập (hay hệ tập) ta hiểu là một họ các tập con của một tập X nào đó cho trước.

1.1. Vành, đại số và σ-đại số.

1.1.1. Định nghĩa. Một họ tập $\mathcal{R}$ không rỗng (các tập con của X) được gọi là một *vành* nếu nó có các tính chất sau:

(a) $\forall A, B \in \mathcal{R},\ A \cup B \in \mathcal{R}$,

(b) $\forall A, B \in \mathcal{R},\ A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Một vành chứa X (nghĩa là $X \in \mathcal{R}$) thì được gọi là một *đại số*.

1.1.2. Nhận xét.

(i) Nếu $\mathcal{R}$ là một vành thì $\emptyset \in \mathcal{R}$. Thật vậy, vì $\mathcal{R} \neq \emptyset$ nên có $A \in \mathcal{R}$. Khi đó $A \setminus A = \emptyset \in \mathcal{R}$.

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{R}$ thì $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$ theo (b). Như vậy vành đóng kín đối với phép lấy giao, hợp hữu hạn các tập hợp.

(iii) $\mathcal{R}$ là một đại số thì:

(b') $A \in \mathcal{R}$ kéo theo $A^c \in \mathcal{R}$.

Từ đây dễ thấy rằng:

$\mathcal{R}$ là một đại số khi và chỉ khi $\mathcal{R} \neq \emptyset$ và thoả mãn các điều kiện (a) và (b').

1.1.3. Định nghĩa. Một họ tập $\mathcal{R} \neq \emptyset$ được gọi là một *σ-vành* nếu nó thoả mãn các điều kiện sau:

MATH-EDUCARE

(a') $A_i \in \mathcal{R}. i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$ thì $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$.

(b) $\forall A. B \in \mathcal{R}. A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Một σ- vành chứa X được gọi là một *σ-đại số*

1.1.4. Nhận xét.

(i) Một σ- vành đóng kín với phép lấy giao đếm được.

(ii) Mọi σ-vành $\mathcal{R}$ là một vành.

1.1.5. Định lí. *Một họ $\mathcal{R}$ khác rỗng các tập con của X là một σ-đại số khi và chỉ khi nó thỏa mãn các điều kiện (a') và (b').*

1.1.6. Định lí. *Giao của một họ bất kì các vành (đại số, σ-đại số, σ-vành) là một vành (đại số, σ-đại số, σ-vành).*

1.1.7. Định lí. *Với mọi họ tập $\mathcal{C}$, tồn tại một vành (đại số, σ- vành, σ-đại số) duy nhất chứa $\mathcal{C}$ và chứa trong mọi vành (đại số, σ- vành, σ-đại số) chứa $\mathcal{C}$. Ta sẽ gọi nó là vành (đại số, σ- vành, σ-đại số, tương ứng) sinh bởi họ $\mathcal{C}$ và kí hiệu $\mathcal{F}(\mathcal{C})$.**

1.2. Nửa vành.

1.2.1. Định nghĩa. Họ $\mathcal{R}$ không rỗng các tập con của X được gọi là *nửa vành* nếu nó thoả mãn các điều kiện sau:

(a1) $A, B \in \mathcal{R}$ thì $A \cap B \in \mathcal{R}$,

(b1) $A, B \in \mathcal{R}$ và $A \subset B$ thì tồn tại một số hữu hạn các tập $C_i \in \mathcal{R}$, $i = 1, \cdots, n$ rời nhau từng đôi một sao cho

$$B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i.$$

1.2.2. Nhận xét.

(i) Dễ thấy rằng mọi vành đều là nửa vành.

(ii) Mọi nửa vành đều chứa tập $\emptyset$.

---

*Tuỳ từng trường hợp cụ thể mà ta gọi $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ là đại số, σ- vành hay σ-đại số sinh bởi họ $\mathcal{C}$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

Bổ đề sau đây đóng vai trò quan trọng trong các mục sau.

1.2.3. Bổ đề. *Giả sử $\mathcal{R}$ là một nửa vành và $A, A_1, \cdots, A_p \in \mathcal{R}$, $(p \in \mathbf{N})$. Khi đó tồn tại một số hữu hạn các tập $C_i \in \mathcal{R}, i = 1, 2, \cdots, r$ $(r \in \mathbf{N})$ đôi một không giao nhau và sao cho*

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{p} A_i = \bigcup_{i=1}^{r} C_i. \tag{1.1}$$

§2. ĐỘ ĐO TRÊN NỬA VÀNH

2.1. Hàm tập.

2.1.1. Các quy ước về các phép toán trên $\overline{\mathbb{R}}$.

Trong chương này và chương sau chúng ta sẽ làm việc với tập số thực mở rộng $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ (ta thường viết ∞ thay cho $+\infty$). Để thuận tiện cho việc tính toán, ta nhắc lại một số quy ước khi thực hiện các phép tính trên $\overline{\mathbf{R}}$.

* $\forall x \in \mathbf{R}$, $-\infty < x < +\infty$,
* $\forall x \in \mathbf{R}$, $x \pm \infty = \pm\infty$,
* $0 \times \infty = \infty \times 0 = 0$, $0 \times (-\infty) = (-\infty) \times 0 = 0$,
* $\forall a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ thì

$$a \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times a = \begin{cases} \pm\infty & \text{nếu } a > 0, \\ \mp\infty & \text{nếu } a < 0, \end{cases}$$

* $+\infty \times (+\infty) = +\infty$,
* $\infty + \infty = \infty$, $-(-\infty) = \infty$,
* $+\infty \times (-\infty) = -\infty \times (+\infty) = -\infty$ và $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$,
* Các biểu thức $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ không được định nghĩa trong $\overline{\mathbf{R}}$.

Ta cũng quy ước $\inf \emptyset = +\infty$.

MATH-EDUCARE

Bây giờ cho X là một tập khác rỗng và $\mathcal{C}$ là một họ không rỗng các tập con của X.

2.1.2. Định nghĩa. Một ánh xạ $\mu : \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ được gọi là một *hàm tập*.

Đối với một hàm tập μ ta sẽ viết μA thay cho $\mu(A)$. Hàm tập μ gọi là *không âm* trên $\mathcal{C}$, kí hiệu $\mu \geq 0$, nếu $\mu A \geq 0$ với mọi $A \in \mathcal{C}$.

2.1.3. Định nghĩa. Cho hàm tập $\mu : \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$.

• μ được gọi là *cộng tính* (*cộng tính hữu hạn*) nếu $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ và $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{C}$ thì

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

• μ được gọi là *σ-cộng tính* (hay *cộng tính đếm được*) nếu $A_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2, \ldots$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ và $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

2.1.4. Nhận xét.

(i) Nếu $\emptyset \in \mathcal{C}$ và hàm tập μ là cộng tính hay σ- cộng tính thì $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Nếu μ là σ- cộng tính và $\emptyset \in \mathcal{C}$ thì μ là cộng tính.

2.2. Khái niệm độ đo.

2.2.1. Định nghĩa.

• Cho $\mathcal{R}$ là một nửa vành trên X. Một hàm tập $m : \mathcal{R} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ được gọi là một *độ đo* nếu m thoả mãn các điều kiện sau:

(i) $m(\emptyset) = 0$,

(ii) m không âm,

(iii) m là σ- cộng tính.

Lúc này $(X, \mathcal{R}, m)$ được gọi là một *không gian độ đo*.

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

• Độ đo m được gọi là *hữu hạn* nếu với mọi $A \in \mathcal{R}$, $m(A) < +\infty$.

• Độ đo m được gọi là *σ-hữu hạn* nếu với mọi $A \in \mathcal{R}$, tồn tại một dãy $(A_n)_n \subset \mathcal{R}$ sao cho $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, và $mA_n < +\infty$, mọi $n \in \mathbf{N}$.

2.2.2. Nhận xét. Dễ dàng thấy rằng nếu m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$ thì

(i) m là cộng tính,

(ii) Nếu $A, B \in \mathcal{R}$ và $A \subset B$ thì $mA \leq mB$. Nếu hơn nữa, $mB < +\infty$ thì $mA < +\infty$ và lúc này ta sẽ có $m(B \setminus A) = mB - mA$ nếu $B \setminus A \in \mathcal{R}$.

2.3. Một số tính chất của độ đo.

2.3.1. Định lí. *Giả sử $m : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty]$ là một hàm tập trên nửa vành $\mathcal{R}$. Khi đó m là một độ đo trên $\mathcal{R}$ khi và chỉ khi các điều kiện sau thoả mãn:*

(i) $m(\emptyset) = 0$,

(ii) Nếu $A, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{R}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$ *và* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *với* $i \neq j$ *thì*

$$\sum_{i=1}^{\infty} mA_i \leq mA,$$

(iii) Nếu $A, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{R}$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *thì* $mA \leq \sum_{i=1}^{\infty} mA_i$.

Tính chất nêu ở (iii) gọi là σ-nửa cộng tính của độ đo m.

Từ đây về sau để cho gọn, đôi khi ta sẽ dùng kí hiệu $A_n \uparrow A$ để chỉ dãy tập $(A_n)_n$ trong X có tính chất $A_n \subset A_{n+1}$, với

WWW.MATHEDUCARE.COM

mọi $n \in \mathbf{N}$ và $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Tương tự, kí hiệu $A_n \downarrow A$ được hiểu là $A_n \supset A_{n+1}$, với mọi $n \in \mathbf{N}$ và $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Định lí sau đây nêu lên hai tính chất quan trọng và hữu ích của độ đo:

2.3.2. Định lí. *Giả sử $\mathcal{R}$ là một vành và m là một độ đo trên $\mathcal{R}$. Khi đó các khẳng định sau là đúng:*

(a) Nếu $(A_n)_{n\in \mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$, $A \in \mathcal{R}$ và $A_n \uparrow A$ thì $\lim_{n\to\infty} mA_n = mA$.

(b) Nếu $(A_n)_{n\in \mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$, $A \in \mathcal{R}$, $A_n \downarrow A$ và $mA_1 < +\infty$ (hay tồn tại n_0 để cho $mA_{n_0} < +\infty$) thì $\lim_{n\to\infty} mA_n = mA$.

§3. THÁC TRIỂN ĐỘ ĐO

3.1. Độ đo ngoài, độ đo ngoài sinh bởi một độ đo.

3.1.1. Định nghĩa. Một hàm tập m xác định trên $\mathcal{P}(X)$ được gọi là một *độ đo ngoài* trên X nếu thoả mãn các điều kiện sau:

(a) m không âm,

(b) $m(\emptyset) = 0$,

(c) Nếu $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ thì $mA \leq \sum_{i=1}^{\infty} mA_i$.

3.1.2. Nhận xét. Giả sử m là một độ đo ngoài trên X. Khi đó dễ chứng minh được rằng:

(i) Nếu $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ thì $m(A) \leq \sum_{i=1}^{n} mA_i$ (nửa cộng tính).

(ii) Nếu $A \subset B$ thì $mA \leq mB$.

Các định lí sau đây là cơ sở để chúng ta thác triển một độ đo m trên nửa vành lên một σ-đại số.

MATH-EDUCARE

3.1.3. Định lí. *Giả sử m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$. Khi đó nếu đặt, mỗi $A \subset X$,*

$$m^*A = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} mE_i \mid E_i \in \mathcal{R},\ i \in \mathbf{N} \text{ và } \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset A\} \quad (3.1)$$

thì m^* là một độ đo ngoài trên X (để ý quy ước $\inf \emptyset = +\infty$). Ngoài ra nếu $A \in \mathcal{R}$ thì $m^*A = mA$. Ta sẽ gọi m^* là độ đo ngoài sinh bởi độ đo m.

3.2. Tập m^*-đo được và Định lí Carathéodory.

3.2.1. Định nghĩa. Cho m^* là một độ đo ngoài trên X. Một tập $A \subset X$ được gọi là *m^*-đo được* (hay đo được theo Carathéodory) nếu

$$m^*E = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A),\ \forall E \subset X. \quad (3.2)$$

Họ tất cả các tập m^*-đo được được kí hiệu là $\mathcal{L}$.

3.2.2. Nhận xét.

(i) Dễ thấy rằng điều kiện (3.2) trong Định nghĩa 3.2.1 tương đương với một trong hai điều kiện sau:

$$m^*E \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A),\ \forall E \subset X, \quad (3.2')$$

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c),\ \text{mọi } E \subset X. \quad (3.2'')$$

Từ (3.2") ta thấy ngay nếu $A \in \mathcal{L}$ thì $A^c \in \mathcal{L}$. Đặc biệt, $\emptyset \in \mathcal{L}$ (rõ ràng) nên $X \in \mathcal{L}$.

(ii) Nếu $m^*A = 0$ thì $A \in \mathcal{L}$. Thật vậy, lúc đó với mọi $E \subset X$, $m^*(A \cap E) = 0$ và do đó,

$$m^*E \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A) = m^*(E \setminus A) \leq m^*E.$$

Với các kí hiệu như trên ta có định lí sau:

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

3.2.3. Định lí. (Carathéodory) *$\mathcal{L}$ là một σ-đại số và thu hẹp μ của m^* trên $\mathcal{L}$, $\mu = m^*_{|\mathcal{L}}$, là một độ đo.*

Ta sẽ gọi μ là độ đo *sinh bởi độ đo ngoài* m^*.

3.3. Định lí thác triển.

Định lí sau đây tổng kết các kết quả vừa nêu ở các Mục 3.1, 3.2, được gọi là Định lí thác triển độ đo.

3.3.1. Định lí. (*Thác triển độ đo*) *Giả sử m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$, m^* là độ đo ngoài sinh bởi m, còn μ là độ đo sinh bởi độ đo ngoài m^*. Khi đó μ là một thác triển của m lên σ-đại số $\mathcal{L}$ các tập m^*-đo được, nghĩa là $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ và $\mu A = mA$, mọi $A \in \mathcal{R}$.*

Cách thác triển một độ đo nêu trên thường được gọi là *thác triển tiêu chuẩn* (hay thác triển theo Carathéodory), còn μ được gọi là *thác triển tiêu chuẩn* của m.

3.3.2. Định nghĩa. Giả sử m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$. Độ đo m được gọi là *đủ* nếu từ $A \in \mathcal{R}$, $mA = 0$ và $E \subset A$ kéo theo $E \in \mathcal{R}$ (và do đó $mE = 0$). Lúc này ta cũng nói không gian độ đo $(X, \mathcal{R}, m)$ là *đủ*.

Một số tính chất đáng lưu ý của độ đo thác triển tiêu chuẩn μ được nêu lên trong định lí sau:

3.3.3. Định lí. *Giả sử m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$, μ là thác triển tiêu chuẩn của m lên σ-đại số $\mathcal{L}$ các tập m^*-đo được. Khi đó:*

(i) Nếu $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ với $A_n \in \mathcal{R}$ mọi $n \in \mathbf{N}$ và $mA_n < +\infty$ thì không những m là σ-hữu hạn mà mở rộng tiêu chuẩn μ của nó cũng vậy,

(ii) μ là độ đo đủ,

(iii) $\mathcal{L} \supset \mathcal{F}(\mathcal{R})$. Ngoài ra, nếu μ là σ-hữu hạn thì $A \in \mathcal{L}$ khi và chỉ khi

$$A = B \setminus N \text{ hay } A = B \cup N \tag{3.3}$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

trong đó $B \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$, $\mu N = 0$ với m^* là độ đo ngoài sinh bởi m ($\mathcal{F}(\mathcal{R})$ là σ-đại số sinh bởi $\mathcal{R}$).

§4. ĐỘ ĐO LEBESGUE TRÊN $\mathbb{R}^k$

4.1. Độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$

• Ta nhắc lại rằng một *gian* trên $\mathbf{R}$ là một tập con của $\mathbf{R}$ có một trong các dạng sau: $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)$, $a,b \in \mathbf{R}$. Ta sẽ kí hiệu một gian với hai đầu mút a,b ($a,b \in \overline{\mathbf{R}}$) là $\langle a,b\rangle$. $\mathcal{R}$ tất cả các gian là một nửa vành và được gọi là *nửa vành các gian* trên $\mathbf{R}$.

• Trên $\mathcal{R}$ ta định nghĩa một hàm tập $m : \mathcal{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ như sau: mọi $P \in \mathcal{R}, P = \langle a,b\rangle^*$, $a,b \in \overline{\mathbf{R}}$

$$mP = \begin{cases} b-a & \text{nếu } P \neq \emptyset, \\ 0 & \text{nếu } P = \emptyset \end{cases}$$

(lưu ý các phép toán trên $\overline{\mathbf{R}}$ ở 2.2.1). Khi đó ta có:

4.1.1. Bổ đề. *m là một độ đo trên nửa vành các gian $\mathcal{R}$.*

4.1.2. Định nghĩa. Thác triển tiêu chuẩn μ của độ đo m trên nửa vành các gian $\mathcal{R}$ lên σ-đại số $\mathcal{L}$ các tập m^*-đo được (Định lí 3.3.1) gọi là *độ đo Lebesgue* trên $\mathbf{R}$. $\mathcal{L}$ gọi là *σ-đại số các tập đo được Lebesgue* trên $\mathbf{R}$. Mỗi tập thuộc $\mathcal{L}$ gọi là tập *đo được Lebesgue* hay *(L)-đo được.*

Nhắc lại rằng nếu $A \subset \mathbf{R}$ thì

$$m^*A = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} mP_i \;\middle|\; P_i \text{ là gian}, i \in \mathbf{N}, \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \supset A\right\}. \tag{4.1}$$

*Nếu $b < a$ thì ta quy ước $P = \emptyset$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

Hơn nữa theo Nhận xét 3.1.4 họ các gian $(P_i)_i$ trong (4.1) có thể được chọn sao cho chúng rời nhau từng đôi một. Tập A là đo được Lebesgue khi và chỉ khi

$$m^*E \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A), \forall E \subset \mathbf{R}$$

và lúc này $m^*A = \mu A$.

Độ đo Lebesgue trên $\mathbf{R}$ có một số tính chất đặc biệt nêu trong các hệ quả và định lí dưới đây. Tuy nhiên ta bắt đầu với các nhận xét sau:

4.1.3. Nhận xét.

(i) Độ đo Lebesgue trên $\mathbf{R}$ là một độ đo đủ và σ- hữu hạn.

(ii) Dễ thấy rằng σ-đại số sinh bởi nửa vành các gian $\mathcal{R}$ cũng là σ-đại số Borel trên $\mathbf{R}$. Do đó mọi tập Borel đều đo được Lebesgue. Đặc biệt, mọi tập mở, tập đóng, các tập dạng G_δ, F_σ đều là những tập đo được. Hơn nữa mọi tập đo được Lebesgue đều bằng một tập Borel trong $\mathbf{R}$ thêm vào hay bớt đi một tập có độ đo 0.

4.1.4. Bổ đề. *Với mọi $A \subset \mathbb{R}$,*

$$m^*A = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} m\Delta_k \Big| \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset A, \Delta_k\text{- khoảng mở}, k \in \mathbf{N}\right\}. \tag{4.2}$$

4.1.5. Hệ quả. *Tập $N \subset \mathbb{R}$ có độ đo 0 khi và chỉ khi với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một số hữu hạn hay đếm được các khoảng mở $(\Delta_k)_k$ phủ N và có tổng độ dài bé hơn ϵ, nghĩa là $\bigcup_k \Delta_k \supset N$ và $\sum_k m\Delta_k < \epsilon$.*

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

4.1.6. Hệ quả. *Mọi tập hữu hạn hay đếm được trong* $\mathbb{R}$ *đều đo được và có độ đo 0.*

Như vậy tập các số hữu tỉ $\mathbf{Q}$ là đo được Lebesgue và có độ đo bằng 0. Định lí sau đây cho ta các đặc trưng của tập đo được Lebesgue trên $\mathbf{R}$ và cũng là một kết quả quan trọng và sâu sắc của mục này.

4.1.7. Định lí. *Giả sử* $A \subset \mathbb{R}$. *Ba mệnh đề sau tương đương:*

(i) A *là đo được Lebesgue.*

(ii) $\forall \epsilon > 0, \exists\, G \supset A$, G *mở và sao cho* $m^*(G \setminus A) < \epsilon$.

(iii) $\forall \epsilon > 0, \exists\, F \subset A$, F *đóng và sao cho* $m^*(A \setminus F) < \epsilon$.

4.2. Độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^k (k > 1)$.

Cách xây dựng độ đo Lebesgue trên $\mathbf{R}^k$ cũng hoàn toàn tương tự như cách xây dựng độ đo Lebesgue trên $\mathbf{R}$.

Ta sẽ gọi một *gian* trên $\mathbf{R}^k$ là một tập có dạng

$$\Delta = \prod_{i=1}^{k} \langle a_i, b_i \rangle$$
$$= \{(\xi_1, \cdots, \xi_k) \in \mathbf{R}^k \mid \xi_i \in \langle a_i, b_i \rangle, i = 1, \ldots, k\}$$

trong đó $\langle a_i, b_i \rangle$ là một gian trên $\mathbf{R}$, mọi $i \in \mathbf{N}$. Ta có:

• Họ $\mathcal{R}^k$ tất cả các gian trên $\mathbf{R}^k$ là một nửa vành (và được gọi là nửa vành các gian).

Trên nửa vành $\mathcal{R}^k$, ta định nghĩa một hàm tập $v : \mathcal{R}^k \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ như sau: $v(\emptyset) = 0$ và nếu $\Delta \in \mathcal{R}^k$, $\Delta = \prod_{i=1}^{k} \langle a_i, b_i \rangle \neq \emptyset$ thì

$$v(\Delta) = \prod_{i=1}^{k} m(a_i, b_i).$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

trong đó $m\langle a_i, b_i\rangle$ là độ đo của gian $\langle a_i, b_i\rangle$ định nghĩa ở Mục 4.1 (lưu ý các quy ước về các phép toán trong $\overline{\mathbf{R}}$). $v(\Delta)$ thường được gọi là "thể tích" của gian Δ trong $\mathbf{R}^k$. Ta có:

• Hàm tập v là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}^k$.

4.2.1. Định nghĩa. Thác triển tiêu chuẩn μ^k của v trên nửa vành các gian $\mathcal{R}^k$ lên σ-đại số các tập v^*-đo được $\mathcal{L}^k$ được gọi là *độ đo Lebesgue* trên $\mathbf{R}^k$. Lúc này $\mathcal{L}^k$ được gọi là *σ-đại số các tập đo được Lebesgue* còn mỗi tập thuộc $\mathcal{L}^k$ được gọi là một tập *đo được Lebesgue* (hay *(L)-đo được*) trong $\mathbf{R}^k$.

Độ đo Lebesgue trên $\mathbf{R}^k$ có những tính chất tương tự như độ đo Lebesgue trong $\mathbf{R}$ cho trong Nhận xét 4.1.3, Bổ đề 4.1.4, Hệ quả 4.1.5 - 4.1.6 (các khoảng mở Δ_i được thay bởi các hình hộp mở trong $\mathbf{R}^k$), Nhận xét 4.1.8. Chẳng hạn, μ^k là đủ và σ-cộng tính; σ-đại số $\mathcal{F}(\mathcal{R}^k)$ chính là σ-đại số Borel trên $\mathbf{R}^k$ và ta có $\mathcal{F}(\mathcal{R}^k) \subset \mathcal{L}^k$. Như vậy mọi tập Borel đều đo được Lebesgue. Các kết luận trong Định lí 4.1.7 cũng còn đúng cho các tập thuộc $\mathbf{R}^k$. Cụ thể ta có:

4.2.2. Định lí. *Giả sử $A \subset \mathbb{R}^k$. Khi đó ba mệnh đề sau đây tương đương:*

(i) A là đo được Lebesgue,

(ii) $\forall \epsilon > 0, \exists G \supset A$, G mở và sao cho $v^*(G \setminus A) < \epsilon$,

(iii) $\forall \epsilon > 0, \exists F \subset A$, F đóng và sao cho $v^*(A \setminus F) < \epsilon$.

§5. HÀM ĐO ĐƯỢC

Cho X là một tập tuỳ ý khác rỗng và $\mathcal{A}$ là một σ-đại số trên X. Lúc này cặp $(X, \mathcal{A})$ sẽ được gọi là một *không gian đo được* và mỗi tập $A \in \mathcal{A}$ sẽ được gọi là một *tập đo được* (hay *$\mathcal{A}$-đo được*) trong X.

Giả sử $A \subset X$ và $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$. Để ngắn gọn, ta sẽ sử dụng kí hiệu $A[f > a]$, $(a \in \mathbf{R})$ để chỉ tập hợp $\{x \in A \mid f(x) > a\}$. Các kí hiệu $A[f \geq a]$, $A[f < a]$, $A[f \leq a]$, $A[f = g]$, ... cũng được hiểu cùng một cách như vậy.

5.1. Định nghĩa hàm đo được.

5.1.1. Định nghĩa. Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được, $A \in \mathcal{A}$ và $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$. Hàm f được gọi là *đo được* trên A đối với σ-đại số $\mathcal{A}$ (hay f là *$\mathcal{A}$-đo được* trên A) nếu

$$A[f > a] \in \mathcal{A}, \text{ mọi } a \in \mathbf{R}. \tag{5.1}$$

5.1.2. Bổ đề. *Hàm $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ là đo được khi và chỉ khi một trong ba điều kiện sau thỏa mãn*

$$A[f \geq a] \in \mathcal{A}. \quad \forall a \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

$$A[f \leq a] \in \mathcal{A}. \quad \forall a \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

$$A[f < a] \in \mathcal{A}. \quad \forall a \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

5.1.3. Nhận xét.

Dễ chứng minh được rằng nếu $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ (f chỉ nhận giá trị thực) thì f đo được trên $A \in \mathcal{A}$ khi và chỉ khi $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, với mọi tập Borel B trong $\mathbf{R}$.

Nếu X là một không gian tôpô, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ (σ-đại số Borel trên X) và f là $\mathcal{B}(X)$-đo được thì ta cũng nói f là *đo được Borel* trên X hay f là *hàm Borel*.

Trường hợp $X = \mathbf{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{L}^n$ và f là $\mathcal{L}^n$-đo được thì ta cũng nói là f *đo được Lebesgue* hay *(L)-đo được*. Một hàm f đo được Borel thì đo được Lebesgue. Cũng để ý rằng nếu $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ là liên tục thì f là (L)-đo được. Điều ngược lại nói chung không đúng.

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

5.1.4. Một số tính chất đơn giản của hàm đo được.

Các tính chất sau đây được suy ra ngay từ Định nghĩa 5.1.1.

(i) Nếu $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là $\mathcal{A}$-đo được thì f là $\mathcal{A}$-đo được trên mọi tập con đo được của A. Thật vậy nếu $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$ thì với mọi $a \in \mathbf{R}$,

$$B[f > a] = B \cap A[f > a] \in \mathcal{A}.$$

(ii) Nếu $(E_i)_{i \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{A}$, $A = \bigcup_i E_i$ và $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là đo được trên mỗi E_i, $i \in \mathbf{N}$ thì f đo được trên A. Điều này được suy ra từ

$$A[f > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_i[f > a] \in \mathcal{A} \text{ mọi } a \in \mathbf{R}.$$

(iii) Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo đủ. Khi đó nếu $A \in \mathcal{A}$ và $\mu A = 0$ thì mọi hàm $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ đều $\mathcal{A}$-đo được.

5.2. Các phép toán trên các hàm đo được.

5.2.1. Định lí. *Giả sử $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được, $A \in \mathcal{A}$ và $f, g : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Khi đó:*

(i) Nếu f đo được trên A, $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\alpha.f$ đo được trên A. Nếu $\alpha > 0$ thì $|f|^\alpha$ cũng đo được trên A,

(ii) Nếu f, g hữu hạn (nghĩa là $f(A) \subset \mathbb{R}$ và $g(A) \subset \mathbb{R}$) và đo được trên A thì các hàm số $f \pm g$, $f.g$ cũng đo được và nếu $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in A$ thì $\frac{f}{g}$ cũng đo được trên A.

Nhắc lại rằng với dãy $(f_n)_n$ các hàm xác định trên A và nhận giá trị trong $\overline{\mathbf{R}}$, người ta định nghĩa, với $x \in A$,

$$\sup_n f_n(x) = \sup\{f_n(x) | \ n \in \mathbf{N}\},$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

$$\inf_n f_n(x) = \inf\{f_n(x) |\ n \in \mathbf{N}\},$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_k(\inf_{n\geq k} f_n(x)), \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_k(\sup_{n\geq k} f_n(x)).$$

5.2.2. Định lí. *Giả sử $(f_n)_n$ là một dãy các hàm đo được (không nhất thiết hữu hạn) trên $A \in \mathcal{A}$. Khi đó các hàm số $\inf_n f_n$, $\sup_n f_n$, $\underline{\lim}_n f_n$, $\overline{\lim}_n f_n$ cũng đo được trên A.*

5.2.3. Hệ quả.

(i) Giả sử $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m$ là các hàm đo được trên $A \in \mathcal{A}$. Khi đó các hàm

$$\max\{f_1, f_1, \ldots, f_m\}, \quad \min\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$$

cũng đo được.

(ii) Nếu $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là một dãy các hàm đo được trên A và nếu giới hạn $\lim_n f_n(x)$ tồn tại trong $\overline{\mathbb{R}}$ với mọi $x \in A$ thì hàm $\lim_{n\to\infty} f_n$ đo được trên A.

5.3. Tập có độ đo không và tính chất "hầu khắp nơi".

Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo ($\mathcal{A}$ là một σ-đại số) và $A \in \mathcal{A}$. Ta nói một tính chất $P(x)$ (phụ thuộc vào x) nào đó thoả mãn *hầu khắp nơi (h.k.n.)* trên A (hay $P(x)$ thoả mãn với *hầu hết* các $x \in A$) nếu tồn tại một tập $B \in \mathcal{A}$ sao cho $\mu B = 0$ và $P(x)$ được thoả mãn với mọi $x \in A \setminus B$. Nói một cách khác, tập C gồm tất cả những $x \in A$ mà tại đó $P(x)$ không thoả mãn được chứa trong một tập hợp có độ đo không (mà trên quan điểm độ đo coi như "không đáng kể"). Cũng để ý rằng định nghĩa này không đòi hỏi tập hợp C đo được. Đôi khi để chỉ rõ độ đo μ (trường hợp đang xét nhiều độ đo) ta viết "μ-h.k.n." thay cho "h.k.n.".

MATH-EDUCARE

Bây giờ chúng ta nêu ra một số ví dụ về tính chất hầu khắp nơi thường gặp trong giáo trình này.

5.3.1. Ví dụ.

(a) Hàm $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là hữu hạn hầu khắp nơi trên A nếu $f(x) \in \mathbf{R}$ mọi $x \in A$ ngoại trừ trên một tập $B \subset A$ mà $B \subset B_0$ và $\mu(B_0) = 0$.

(b) Dãy $(f_n)_n$ các hàm xác định trên A là hội tụ hầu khắp nơi trên A về hàm f nếu có tập $B \subset A$ sao cho $\mu B = 0$ và $f_n(x) \to f(x)$ khi $n \to \infty$ với mọi $x \in A \setminus B$.

(c) Hai hàm f, g xác định trên A là bằng nhau hầu khắp nơi trên A nếu $\{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\} \subset B$ mà $\mu B = 0$. Hai hàm bằng nhau h.k.n. trên A được gọi là *tương đương* trên A và thường được kí hiệu là $f \sim g$. Nói một cách khác, hai hàm tương đương nhau thì chúng chỉ khác nhau trên một tập con của một tập có độ đo không. Cũng để ý rằng quan hệ "$\sim$" là một quan hệ tương đương trên lớp các hàm xác định trên A.

5.3.2. Nhận xét. Nếu μ là một độ đo đủ thì khái niệm h.k.n. trở nên đơn giản hơn. Cụ thể, $P(x)$ thoả mãn h.k.n. trên A có nghĩa là tập các $x \in A$ mà $P(x)$ không thỏa mãn là một tập có đo được và có độ đo không.

5.3.3. Định lí. *Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo với μ là một độ đo đủ, $A \in \mathcal{A}$ và $f, g : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Nếu f tương đương với g trên A và f là đo được thì g cũng đo được.*

5.3.4. Nhận xét.

(i) Trong Định lí 5.3.3 giả thiết μ đủ là quan trọng. Kết luận của định lí nói chung không còn đúng nữa nếu μ không đủ. Chẳng hạn, xét trườnf hợp $E \subset X$ mà $\mu E = 0$ và $F \subset E$ mà F không là tập đo được. Khi đó , rõ ràng hàm

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in F, \\ 0 & \text{nếu } x \in E \setminus F \end{cases}$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

tương đương với hàm đo được $f(x) \equiv 0$ trên E nhưng g không đo được.

(ii) Định lí 5.3.3 nói lên rằng nếu độ đo μ là đủ thì dù ta thay đổi giá trị của hàm đo được f (bởi các giá trị mới, ngay cả thuộc tập số thực mở rộng $\overline{\mathbf{R}}$) trên một tập có độ đo không thì tính đo được của "nó" vẫn không bị phá vỡ (nghĩa là hàm mới nhận được vẫn là hàm đo được).

5.4. Cấu trúc của hàm đo được.

Một hàm số $s : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ chỉ lấy một số hữu hạn giá trị thuộc $\mathbf{R}$ được gọi là một hàm *đơn giản* trên A.

Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là các giá trị (khác nhau từng đôi) của hàm đơn giản s trên A. Đặt

$$A_i = \{x \in X \mid s(x) = \alpha_i\}, \ i = 1, 2, ..., n.$$

Khi đó $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ và

$$s(x) = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x), \ x \in A$$

và mọi hàm s có dạng (5.5) với các A_i đôi một rời nhau và $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ đều là các hàm đơn giản trên A. s là đo được khi và chỉ khi các A_i, $i = 1, 2, ..., n$ đều là các tập đo được (nghĩa là thuộc $\mathcal{A}$). Hàm đơn giản s được gọi là *không âm* nếu $\alpha_i \geq 0$ với mọi $i = 1, 2, 3, ...n$.

5.4.1. Định lí. *Cho $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ là hàm đo được không âm. Tồn tại một dãy các hàm đơn giản đo được $(s_n)_n$ trên A thoả mãn các điều kiện sau:*

(i) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$,

(ii) $s_n(x) \to f(x)$ *khi* $n \to \infty$, *với mọi* $x \in A$.

MATH-EDUCARE

Ngoài ra, nếu f là hàm bị chặn trên A thì dãy $(s_n)_n$ có thể được chọn sao cho $(s_n)_n$ hội tụ đều đến f trên A và $s_n \leq n$, mọi $n \in \mathbf{N}$.

5.5. Hội tụ theo độ đo.

Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo ($\mathcal{A}$ là một σ-đại số), $A \in \mathcal{A}$.

5.5.1. Định nghĩa. Giả sử $f, f_n : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$, $n \in \mathbf{N}$ là các hàm đo được trên A. Ta nói dãy $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *hội tụ theo độ đo* đến hàm f, kí hiệu $f_n \xrightarrow{\mu} f$, nếu với mọi số $\delta > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mu\{x \in A \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\} = 0. \qquad (5.6)$$

5.5.2. Nhận xét. Nếu ta không phân biệt các hàm tương đương (theo μ) thì giới hạn của một dãy hàm hội tụ theo độ đo là duy nhất. Điều này được thể hiện qua hai khẳng định sau, giả sử μ là đủ:

(i) Nếu $f_n \xrightarrow{\mu} f$ và $f_n \xrightarrow{\mu} g$ trên A thì $f \sim g$ trên A.

(ii) f_n, f, g đo được trên A, $f_n \xrightarrow{\mu} f$ và $f \sim g$ trên A thì $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

Mối quan hệ giữa hội tụ theo độ đo và hội tụ hầu khắp nơi được thể hiện trong các định lí và nhận xét dưới đây:

5.5.3. Định lí. *Giả sử μ là độ đo đủ, $(f_n)_n$ là dãy các hàm đo được và $f_n \longrightarrow f$ h.k.n. trên $A \in \mathcal{A}$. Khi đó f đo được trên A và nếu $\mu A < +\infty$ thì $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

5.5.4. Nhận xét.

(i) Giả thiết $\mu A < +\infty$ trong Định lí 5.5.3 là quan trọng và không thể bỏ được. Nghĩa là sự hội tụ h.k.n. của một dãy hàm đo được trên A với $\mu A = +\infty$ nói chung không kéo theo sự hội tụ theo độ đo của dãy hàm này.

WWW.MATHEDUCARE.COM

(ii) Một dãy hội tụ theo độ đo có thể không hội tụ hầu khắp nơi. Tuy nhiên ta có:

5.5.5. Định lí. *Giả sử* $(f_n)_n$ *là dãy các hàm đo được trên* A, $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $n \to \infty$. *Khi đó có một dãy con* $(f_{n_k})_{k \in \mathbf{N}} \subset (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *sao cho* $f_{n_k} \longrightarrow f$ *h.k.n. trên* A.

MATH-EDUCARE

B. Bài tập

§1. Nửa vành, vành và đại số các tập.

Bài 1.1. Giả sử X, Y là hai tập cho trước và $f : X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ, $\mathcal{R}$ là một vành (tương ứng, σ-vành, σ-đại số) trên Y. Chứng minh rằng $f^{-1}(\mathcal{R})$ là một vành (tương ứng, σ-vành, σ-đại số) trên X. Ở đây

$$f^{-1}(\mathcal{R}) := \{A \subset X \mid \exists B \in \mathcal{R}, A = f^{-1}(B)\}.$$

Bài 1.2. Cho $\mathcal{A}$ là một σ-đại số trên X, $\mathcal{O}$ là một họ các tập con của một tập S và $\mathcal{B}$ là σ-đại số sinh bởi $\mathcal{O}$. Giả sử $f : X \longrightarrow S$ là một ánh xạ sao cho với mọi $G \in \mathcal{O}$ ta đều có $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$. Chứng minh rằng $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ với mọi $B \in \mathcal{B}$.

Bài 1.3. Cho $\mathcal{R}$ là một vành trên X. Gọi $\mathcal{A}$ là lớp tất cả các tập $E \subset X$ sao cho hoặc $E \in \mathcal{R}$ hoặc $E^c = X \setminus E \in \mathcal{R}$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{A}$ là một đại số.

Bài 1.4. Cho X là một tập tuỳ ý khác rỗng. Gọi $\mathcal{R}$ là lớp tất cả các tập chỉ gồm một điểm của X và tập $\emptyset$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{R}$ là một nửa vành.

Bài 1.5. Cho $\mathcal{R}$ là một nửa vành trên X và $C \subset X$ sao cho $C = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Chứng tỏ rằng C có thể được biểu diễn dưới dạng $C = \cup_{m=1}^{\infty} B_m$ trong đó $(B_m)_m \subset \mathcal{R}$, các tập B_m rời nhau từng đôi một và với mỗi m, B_m được chứa trong ít nhất một tập A_n nào đó.

[Hướng dẫn. Đặt $E_n = A_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} A_i$, rồi sử dụng Bổ đề 1.2.4.]

Bài 1.6. Cho $\mathcal{R}$ là một lớp khác rỗng các tập con của X thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(a) $A, B \in \mathcal{R}$ thì $A \cap B \in \mathcal{R}$,

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

(b) $A, B \in \mathcal{R}$, $A \subset B$ thì tồn tại một số hữu hạn các tập $C_0, C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{R}$ sao cho $C_0 = A \subset C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n = B$ và $D_i = C_i \setminus C_{i-1} \in \mathcal{R}$. $i = 1, 2, \ldots n$.

Chứng tỏ rằng $\mathcal{R}$ là một nửa vành.

Bài 1.7. Một lớp $\mathcal{A}$ các tập con của X được gọi là một lớp đơn điệu nếu mọi dãy $(E_n)_n \subset \mathcal{A}$ đơn điệu tăng hay đơn điệu giảm ta đều có: $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$ nếu $(E_n)_n$ đơn điệu tăng và $\cap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$ nếu $(E_n)_n$ đơn điệu giảm. Chứng tỏ rằng:

(a) Mọi σ-vành đều là một lớp đơn điệu,

(b) Mọi vành đơn điệu đều là σ-vành.

Bài 1.8. Cho $\mathcal{R}$ là một σ-đại số trên X, $A \subset X$. Chứng tỏ rằng

$$\mathcal{R}_A = \{Z \cap A \mid Z \in \mathcal{R}\}$$

là một σ-đại số các tập con của A.

Bài 1.9. Giả sử X là một tập không đếm được. Gọi $\mathcal{A}$ là họ gồm tất cả các tập $E \subset X$ sao cho E là tập không quá đếm được hoặc $X \setminus E$ không quá đếm được. Chứng minh rằng $\mathcal{A}$ là một σ-đại số (gọi là σ-đại số các tập đếm được hoặc "đối đếm được"). Hơn nữa, $\mathcal{A}$ là σ-đại số sinh bởi họ tất cả các tập hợp chỉ gồm có một điểm của X.

Bài 1.10. Chứng minh rằng σ-đại số Borel $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ trên $\mathbf{R}$ được sinh ra bởi mỗi họ trong các họ tập hợp sau:

(a) $\mathcal{E}_1 := \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbf{R}\}$,

(b) $\mathcal{E}_2 := \{[a, b] \mid a < b,\ a, b \in \mathbf{R}\}$,

(c) $\mathcal{E}_3 := \{(a, b] \mid a < b,\ a, b \in \mathbf{R}\}$,

(d) $\mathcal{E}_4 := \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbf{R}\}$,

(e) $\mathcal{E}_5 := \{(a, \infty) \mid a \in \mathbf{R}\}$,

(g) $\mathcal{E}_6 := \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbf{R}\}$,

(h) $\mathcal{E}_7 := \{[a, \infty) \mid a \in \mathbf{R}\}$,

(i) $\mathcal{E}_8 := \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbf{R}\}$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

§2. Độ đo

Bài 2.1. Cho μ là một hàm tập cộng tính trên một họ tập $\mathcal{C}$. Giả sử $A, B \in \mathcal{C}$, $A \subset B$ và $B \setminus A \in \mathcal{C}$. Chứng minh rằng nếu μB hữu hạn thì μA cũng hữu hạn và ta có $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$. Hơn nữa, nếu $\mu \geq 0$ thì $\mu A \leq \mu B$.

Bài 2.2. Cho m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$. Chứng minh rằng

(i) Nếu $mA_i = 0$ với mọi $i \in \mathbf{N}$ và $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$ thì

$$m(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0,$$

(ii) Nếu $A, B \in \mathcal{R}$, $A \cup B \in \mathcal{R}$, $A \setminus B \in \mathcal{R}$ và $mB = 0$ thì $m(A \cup B) = m(A \setminus B) = mA$.

Bài 2.3. Cho m là một hàm tập không âm, cộng tính trên một vành $\mathcal{R}$, $m(\emptyset) = 0$ và thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

(i) $(A_i)_{i \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$, $A_n \subset A_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbf{N}$ và $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$ thì

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} mA_i,$$

(ii) $(A_i)_{i \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$, $A_n \supset A_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbf{N}$ và $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ thì

$$\lim_{i \to \infty} mA_i = 0.$$

Chứng minh rằng m là một độ đo trên $\mathcal{R}$.

Bài 2.4. Giả sử μ là một hàm tập σ-cộng tính trên vành $\mathcal{R}$. Chứng minh rằng

(a) Nếu $A_n \in \mathcal{R}$, $A_n \subset A_{n+1}$, mọi $n \in \mathbf{N}$, và $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ thì $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

(b) Nếu $A_n \in \mathcal{R}$, $A_n \supset A_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbf{N}$, $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ và $\mu(A_1)$ hữu hạn (hay tồn tại n_0 để cho $\mu(A_{n_0})$ hữu hạn) thì $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

Bài 2.5. Giả sử μ là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$. Chứng minh rằng nếu $(A_n)_{n\in \mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$, $A \in \mathcal{R}$ và $A_n \uparrow A$ thì

$$\lim_{n\to\infty} mA_n = mA.$$

Bài 2.6. Giả sử $\mathcal{S}$ là một nửa vành và $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ là một hàm tập cộng tính hữu hạn. Chứng tỏ rằng nếu μ là σ-nửa cộng tính thì μ là một độ đo trên $\mathcal{S}$.

Bài 2.7. Cho μ là một độ đo đủ (Định nghĩa 3.3.2) trên σ-đại số $\mathcal{R}$, $E \subset X$. Giả sử rằng với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $A \in \mathcal{R}$ sao cho $E \subset A$ và $\mu A < \epsilon$. Chứng tỏ rằng $E \in \mathcal{R}$ và $\mu E = 0$.

Bài 2.8. Giả sử m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$, $A, B \in \mathcal{R}$, $mA < +\infty$. Chứng tỏ rằng tồn tại hữu hạn các tập $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathcal{R}$ sao cho

$$mA - m(A \cap B) = \sum_{i=1}^{n} mC_i.$$

Bài 2.9. Giả sử m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$. Một họ hữu hạn $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ các tập của $\mathcal{R}$ được gọi là một *phân hoạch* của $E \in \mathcal{R}$ nếu $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ và $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$. Phân hoạch $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ (của E) được gọi là một *m-phân hoạch* của E nếu với mọi $A \in \mathcal{R}$ ta đều có

$$m(E \cap A) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i \cap A).$$

Chứng tỏ rằng

(a) Nếu $E = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = F$, $C_i \in \mathcal{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ và $D_i := C_i \setminus C_{i-1} \in \mathcal{R}, i = 1, 2, ..., n$ thì $\{E, D_1, D_2, ..., D_n\}$ là một m phân hoạch của F,

(b) Mọi phân hoạch của $E \in \mathcal{R}$ đều là một m-phân hoạch.

WWW.MATHEDUCARE.COM

Bài 2.10. Cho $\mathcal{B}$ là một đại số các tập con của X và m_n, $n \in \mathbf{N}$ là các độ đo hữu hạn trên $\mathcal{B}$. Giả sử rằng $(\lambda_n)_n$ là một dãy các số dương sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n m_n(X) < +\infty$. Chứng tỏ rằng hàm tập xác định bởi $E \longmapsto m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n m_n E$, $E \in \mathcal{B}$ là một độ đo hữu hạn trên $\mathcal{B}$.

Bài 2.11. Xét nửa vành

$$\mathcal{S} = \{A \subset \mathbf{R} \mid A = \emptyset \text{ hay } A \text{ là không qúa đếm được }\}$$

và định nghĩa $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow [0, +\infty]$ bởi công thức $\mu A = 0$ nếu $A = \emptyset$ hay A là tập hữu hạn và $\mu A = +\infty$ nếu A là đếm được. Chứng tỏ rằng μ là hàm tập cộng tính (hữu hạn) nhưng không là một độ đo trên $\mathcal{S}$.

Bài 2.12. Cho $(X, \mathcal{M})$ là một không gian đo được và hàm $f\colon X \to [0, \infty]$. Hàm tập hợp $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, \infty]$ được định nghĩa bởi $\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x)$ nếu $A \neq \emptyset$ và A hữu hạn hoặc đếm được, $\mu(\emptyset) = 0$ và $\mu(A) = \infty$ nếu A không đếm được. Chứng minh rằng μ là một độ đo.

§3. Thác triển độ đo.

Từ đây về sau các kí hiệu m^*, μ^* được dùng để chỉ độ đo ngoài sinh ra bởi các độ đo m hay μ tương ứng.

Bài 3.1. Cho m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$ các tập con của một tập X và $A \subset X$. Chứng tỏ rằng

$$m^* A = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} mA_n \mid (A_n)_n \subset \mathcal{R}, A_n \cap A_{n'} = \emptyset \text{ nếu } n \neq n', \cup_n A_n \supset A\}.$$

MATH-EDUCARE

[Hướng dẫn. Sử dụng Bài 1.5.]

Bài 3.2. Cho $\mathcal{R}$ là một nửa vành các tập con của X và $(X, \mathcal{R}, \mu)$ là một không gian độ đo. μ^* là độ đo ngoài sinh bởi μ Chứng tỏ rằng tập $A \subset X$ là μ^*-đo được khi và chỉ khi

$$\mu(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \text{ với mọi } E \in \mathcal{R} \text{ và } \mu(E) < +\infty.$$

Bài 3.3. Cho μ là một đô đo ngoài trên X, $(E_n)_n$ là một dãy các tập μ-đo được (Định nghĩa 3.2.1) và rời nhau từng đôi trong X. Chứng tỏ rằng với mọi $A \subset X$ thì

$$\mu(A \cap [\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_i]) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_i).$$

Bài 3.4. Cho μ là một độ đo ngoài trên X và $A \subset X$. Gọi $\mathcal{L}$ là σ-đại số các tập μ-đo được. Hãy chứng tỏ rằng $A \in \mathcal{L}$ khi và chỉ khi

$$\forall \epsilon > 0, \exists E \in \mathcal{L}, E \subset A \text{ sao cho } \mu(A \setminus E) < \epsilon.$$

Bài 3.5. Cho μ là một độ đo ngoài trên X và $(A_n)_n$ là một dãy các tập con của X. Giả sử rằng tồn tại một dãy $(B_n)_n$ các tập μ-đo được, đôi một rời nhau sao cho $A_n \subset B_n$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Chứng tỏ rằng

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

[Hướng dẫn. Đặt $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n$. Sử dụng Bài 3.3 với lưu ý rằng $A \cap B_n = A_n$.]

WWW.MATHEDUCARE.COM

Bài 3.6. Cho μ là một độ ngoài trên X và A là một tập con μ-đo được của X. Chứng tỏ rằng với mọi tập con E của X ta đều có

$$\mu(A \cup E) + \mu(A \cap E) = \mu(A) + \mu(E).$$

Bài 3.7. Cho $\mathcal{F}$ là một họ khác rỗng những tập con của X và $f : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ là một hàm tập. Định nghĩa $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ bởi $\mu(\emptyset) = 0$ và

$$\mu(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} f(A_n) \mid (A_n)_n \subset \mathcal{F} \text{ và } A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n\}$$

với mọi tập con $A \neq \emptyset$ của X (để ý rằng ta luôn quy ước $\inf \emptyset = +\infty$). Chứng minh rằng μ là một độ đo ngoài trên X.

Bài 3.8. Cho m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$ và μ là thác triển tiêu chuẩn của m. Giả sử $A \subset X$ và $m^*A < +\infty$. Khi đó tồn tại một họ $(A_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{L}$, thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $A \subset A_n$, $A_{n+1} \subset A_n$ và $\mu A_n < +\infty$ với mọi $n \in \mathbf{N}$,

(ii) Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, $A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n,i}$, $A_{n,i} \in \mathcal{R}$, $A_n \cap A_{n,i'} = \emptyset$ khi $i \neq i'$,

(iii) Nếu $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ thì $\mu H = m^*A$.

Bài 3.9. Cho m là một độ đo trên σ-vành $\mathcal{R}$, $A \subset X$. Hãy chứng minh rằng

(a) Nếu $m^*A < +\infty$ thì $\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathcal{R}, B \supset A$ sao cho $mB < m^*A + \epsilon$,

(b) $m^*A = \inf\{mE \mid E \in \mathcal{R},\ E \supset A\}$,

(c) Nếu $m^*A < +\infty$ thì tồn tại $C \in \mathcal{R}$ sao cho $C \supset A$ và $m^*A = mC$.

MATH-EDUCARE

Bài 3.10. Cho $m, \mu, \mathcal{L}$ như ở Bài 3.8. Giả sử $A \subset X$ thoả mãn $m^*A < +\infty$. Chứng tỏ rằng tồn tại $B \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ ($\mathcal{F}(\mathcal{R}$ là σ-đại số sinh bởi $\mathcal{R}$) sao cho $B \supset A$ và $m^*A = \mu B$. Nếu thêm $A \in \mathcal{L}$ thì có thể kết luận $\mu(B \setminus A) = 0$. Chứng tỏ rằng lúc này A cũng có thể được viết dưới dạng

$$A = B' \cup N' \text{ với } B' \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \text{ và } m^*N' = 0.$$

Bài 3.11. Giả sử X là một tập khác $\emptyset$ và $\mathcal{R} := \{\emptyset, X\}$. Đặt $m : \mathcal{R} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ với $m(\emptyset) = 0$, $m(X) = 1$.

(a) Chứng tỏ rằng m là một độ đo trên $\mathcal{R}$.

(b) Xác định độ đo ngoài m^* sinh bởi m.

(c) Xác định σ-đại số $\mathcal{L}$ các tập m^*-đo được và độ đo μ là thác triển tiêu chuẩn của m.

Bài 3.12. Cho $m, \mu, \mathcal{L}$ như ở Bài 3.8. Chứng tỏ rằng nếu $E \subset X$ thì

$$m^*E = \inf\{\mu A \mid A \supset E, A \in \mathcal{L}\}.$$

Từ đó suy ra rằng tồn tại $G \in \mathcal{L}$ sao cho $G \supset E$ và $\mu G = m^*A$.

Bài 3.13. Cho $m, \mu, \mathcal{L}$ như ở Bài 3.8 và $E \subset X$. Giả sử rằng với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $A, B \in \mathcal{R}$ sao cho

$$A \subset E \subset B \text{ và } m(B \setminus A) < \epsilon.$$

Chứng tỏ rằng

(a) tồn tại $H, K \in \mathcal{L}$ sao cho

$$H \subset E \subset K \text{ và } \mu(K \setminus H) = 0,$$

(b) $E \in \mathcal{L}$.

Bài 3.14. Cho μ là một độ đo ngoài trên X. Giả sử A là một tập không (phải là) μ-đo được và E là một tập μ-đo được của X sao cho $A \subset E$. Chứng tỏ rằng khi đó $\mu(E \setminus A) > 0$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

§4. Độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^k$.

Bài 4.1. Gọi $\mathcal{S}$ là nửa vành các tập dạng $[a,b)$, $a,b \in \mathbf{R}$. Trên $\mathcal{S}$ ta định nghĩa một hàm tập m với $m(\emptyset) = 0$ và $m([a,b)) = +\infty$ nếu $[a,b) \neq \emptyset$.

(a) Chứng tỏ rằng m là một độ đo trên $\mathcal{S}$.

(b) Xác định m^* và σ-đại số $\mathcal{L}$ các tập m^*-đo được.

(c) Chứng tỏ độ đo đếm λ trên $\mathcal{L}$ là một mở rộng của m lên $\mathcal{L}$ nhưng $\lambda \neq m^*$ (và như vậy mở rộng lên $\mathcal{L}$ là không duy nhất).

Bài 4.2. Gọi m^* là độ đo ngoài sinh bởi độ đo m trên nửa vành các gian trên $\mathbf{R}^k$. Giả sử $E \subset \mathbf{R}^k$. Chứng tỏ rằng ba mệnh đề sau là tương đương.

(i) E là đo được Lebesgue.

(ii) Tồn tại tập K loại G_δ, $K \supset E$ sao cho $m^*(K \setminus E) = 0$.

(iii) Tồn tại tập H loại F_σ, $H \subset E$ sao cho $m^*(E \setminus H) = 0$.

Bài 4.3. Cho $A \subset \mathbf{R}$. Chứng minh rằng A đo được Lebesgue và có độ đo 0 khi và chỉ khi với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại một dãy các khoảng mở $(\Delta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sao cho mỗi $x \in A$ đều thuộc về vô số khoảng Δ_n và sao cho

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\Delta_n < \epsilon.$$

Bài 4.4. Gọi $\mathcal{R}$ là nửa vành các gian trên $\mathbf{R}$. Ta xét hàm tập $m : \mathcal{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ xác định như sau: với mọi $P \in \mathcal{R}$, $P = \langle a,b \rangle$ (nếu $b < a$ thì ta quy ước $P = \emptyset$), $a,b \in \overline{\mathbf{R}}$,

$$mP = \begin{cases} b-a & \text{nếu } P \neq \emptyset, \\ 0 & \text{nếu } P = \emptyset. \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng

WWW.MATHEDUCARE.COM

(a) Nếu $P, P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{R}$, $\cup_{i=1}^k P_i = P$ và $P_i \cap P_j = \emptyset, i \neq j$ thì $\sum_{i=1}^k mP_i = mP$,

(b) Nếu $P, P_1, \ldots, P_k, \ldots \in \mathcal{R}$, $\cup_{i=1}^\infty P_i \subset P$ và $P_i \cap P_j = \emptyset, i \neq j$ thì $\sum_{i=1}^\infty mP_i \leq mP$,

(c) Nếu $P, P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{R}$ mà $P \subset \bigcup_{i=1}^k P_i$ thì $mP \leq \sum_{i=1}^k mP_i$,

(d) m là σ-cộng tính.

Bài 4.5. Trên $\mathbf{R}^k$ với độ đo Lebesgue μ, xét $E \subset \mathbf{R}^k$. Chứng minh các khẳng định sau:

(a) $m^*(E) = \inf\{\mu(G) \mid G \text{ mở}, G \supset E\}$.

(b) Nếu E đo được (L) thì

$$\mu^*(E) = \sup\{\mu(F) \mid F \text{ đóng } F \subset E\}.$$

(c) Nếu E đo được (L) thì

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \text{ compact}, K \subset E\}.$$

Bài 4.6. Gọi μ là độ đo Lebesgue trên $\mathbf{R}$.

(a) Giả sử A là một tập con đo được của $[a, b]$. Xét hàm số $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \mu\big(A \cap [a, x]\big), \quad x \in [a, b].$$

Chứng tỏ rằng f liên tục trên $[a, b]$.

(b) Giả sử $A \subset \mathbf{R}$ là tập đo được và $\mu A = p > 0$. Chứng tỏ rằng khi đó với mọi $q \in (0, p)$, tồn tại một tập con B đo được của A sao cho $\mu B = q$.

Bài 4.7. Cho $a, b \in \mathbf{R}$ và $A \subset \mathbf{R}$. Đặt $aA + b = \{ax + b \mid x \in A\}$. Chứng tỏ rằng

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

(a) $m^*(aA+b) = |a|m^*(A)$,

(b) Nếu A đo được Lebesgue thì $aA+b$ cũng vậy và ta có $\mu(aA+b) = |a|\mu A$.

Ở đây m^* chỉ độ đo ngoài sinh bởi độ đo m trên nửa vành các gian còn μ chỉ độ đo Lebesgue trên $\mathbf{R}$.

§5. Hàm đo được.

Trong tất cả các bài tập sau đây, khi ta nói đến không gian đo được $(X, \mathcal{A})$ hay không gian độ đo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ thì $\mathcal{A}$ luôn được hiểu là một σ-đại số.

Bài 5.1. Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được, $A \in \mathcal{A}$ và $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là một hàm số. Chứng tỏ rằng các mệnh đề sau là tương đương:

(a) f đo được trên A.
(b) $\forall r \in \mathbf{Q},\ A[\, f(x) > r] \in \mathcal{A}$.
(c) $\forall r \in \mathbf{Q},\ A[\, f(x) \geq r] \in \mathcal{A}$.
(d) $\forall r \in \mathbf{Q},\ A[\, f(x) < r] \in \mathcal{A}$.
(e) $\forall r \in \mathbf{Q},\ A[\, f(x) \leq r] \in \mathcal{A}$.

Bài 5.2. Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được, $A \in \mathcal{A}$ và $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là các hàm đo được. Chứng tỏ rằng các tập sau đều là các tập đo được (nghĩa là thuộc $\mathcal{A}$):

(i) $\{x \in A \mid f(x) < g(x)\}$,
(ii) $\{x \in A \mid f(x) \geq g(x)\}$,
(iii) $\{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$.

Bài 5.3. Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được, $A \in \mathcal{A}$, $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là một hàm đo được và p là một số nguyên dương. Chứng tỏ rằng hàm số sau là đo được trên A

$$h(x) = \begin{cases} |f(x)|^p & \text{nếu } f(x) \text{ hữu hạn,} \\ \beta_- & \text{nếu } f(x) = -\infty, \\ \beta_+ & \text{nếu } f(x) = +\infty \end{cases}$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

trong đó β_-, β_+ là các số tùy ý trong $\overline{\mathbf{R}}$.

Bài 5.4. Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được với $\mathcal{A}$ là một σ-đại số và $(f_n)_{n\in \mathbf{N}}$ là một dãy các hàm số đo được trên $A \in \mathcal{A}$.

(a) Chứng tỏ rằng tập hợp E gồm những $x \in A$ sao cho dãy $(f_n(x))_n$ hội tụ là một tập đo được (nghĩa là $E \in \mathcal{A}$).

(b) Nếu f cũng là hàm đo được trên A thì

$$F := \{x \in A \mid f_n(x) \to f(x),\ n \to \infty\} \in \mathcal{A}.$$

Bài 5.5. Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo, $E \in \mathcal{A}$ và $(f_n)_n$ là một dãy các hàm đo được trên E. Giả sử $f_n \to f$ h.k.n. trên E $(n \to \infty)$. Chứng tỏ rằng:

(a) Tồn tại một hàm g đo được trên E và $g \sim f$.

(b) Giả sử thêm f là hàm đo được trên A. Hãy chứng tỏ rằng tập $\{x \in E \mid f_n(x) \not\to f(x)\}$ là đo được và có độ đo bằng không.

Bài 5.6. Giả sử $\mu A < +\infty$ và $(f_n)_{n\in \mathbf{N}}$ là một dãy các hàm đo được, hội tụ h.k.n. trên A về một hàm đo được f và $\epsilon > 0$ là một số cho trước. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$ ta đặt

$$A_k = \bigcup_{p=k}^{\infty} A[\,|f_p - f| \geq \epsilon\,].$$

Chứng tỏ rằng $\mu A_k \to 0$ khi $n \to \infty$.

Bài 5.7. Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được với $\mathcal{A}$ là một σ-đại số, $A \in \mathcal{A}$ và $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$. Chứng minh rằng các mệnh đề sau tương đương:

(a) f là $\mathcal{A}$-đo được.

(b) $f^{-1}(B) \in A$ với mọi tập Borel B trong $\mathbf{R}$.

Bài 5.8. Cho X là một tập khác rỗng, $(S, \mathcal{D}, \mu)$ là một không gian độ đo với $\mathcal{D}$ là một σ-đại số và $f : X \longrightarrow S$ là một song ánh. Đặt

$$\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{D}) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{D}\},$$

MATH-EDUCARE

$$\tilde{\mu}(B) = \mu A \text{ nếu } B = f^{-1}(A).$$

(a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{A}$ là một σ -đại số và $(X, \mathcal{A}, \tilde{\mu})$ là một không gian độ đo.

(b) Chứng tỏ rằng nếu $g : S \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là một hàm $\mathcal{D}$-đo được thì hàm hợp $g \circ f : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là $\mathcal{A}$-đo được.

Bài 5.9. Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo và $A \in \mathcal{A}$. Giả sử f là một hàm đo được, hữu hạn hầu khắp nơi trên A. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, đặt

$$A_n = \{x \in A \mid |f(x)| \leq n\}.$$

(a) Chứng tỏ rằng $A_n \in \mathcal{A}$, mọi $n \in \mathbf{N}$ và $\lim_{n\to\infty} \mu A_n = \mu A$.

(b) Giả sử $\mu A < +\infty$. Chứng tỏ rằng với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$ sao cho f bị chặn trên B và $\mu(A \setminus B) < \epsilon$.

Bài 5.10. Chứng tỏ rằng nếu f đo được (L) trên mọi đoạn $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ thì f đo được (L) trên $[a, b]$.

Bài 5.11. Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo và $A \in \mathcal{A}$. Chứng tỏ rằng

(a) Nếu $f \sim g$ trên A và $(f_n)_n$ hội tụ h.k.n. đến f trên A thì $(f_n)_n$ hội tụ h.k.n. đến g trên A,

(b) $(f_n)_n$ hội tụ h.k.n. đến f và $(f_n)_n$ hội tụ h.k.n. đến g trên A thì $f \sim g$ trên A.

Bài 5.12. Cho $(f_n)_n$ là dãy các hàm đo được trên A. Giả sử $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ khi $n \to \infty$. Chứng minh rằng

$$\frac{|f_n|}{1 + |f_n|} \xrightarrow{\mu} 0.$$

Bài 5.13. Giả sử $(f_n)_n$ là dãy các hàm đo được trên A và $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A. Chứng tỏ rằng nếu $f_n \geq 0$ h.k.n. trên A thì $f \geq 0$ h.k.n. trên A.

WWW.MATHEDUCARE.COM

Bài 5.14. Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo, $A \in \mathcal{A}$ và $\mu A < +\infty$. $(f_n)_n$ và $(g_n)_n$ là các dãy gồm các hàm đo được, hữu hạn trên A thỏa mãn $f_n \xrightarrow{\mu} f$ và $g_n \xrightarrow{\mu} g$. Chứng tỏ rằng $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$. Khẳng định còn đúng không khi $\mu A = +\infty$?

Bài 5.15. Giả sử $(f_n)_n$ và $(g_n)_n$ là các dãy gồm các hàm đo được, hữu hạn trên A thỏa mãn $f_n \xrightarrow{\mu} f$ và $g_n \xrightarrow{\mu} g$ (f, g cũng đo được, hữu hạn trên A). Chứng minh rằng

$$\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{\mu} \alpha f + \beta g \quad \text{với mọi } \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Bài 5.16. Cho A là tập đo được, $f_n, f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ là những hàm đo được, $n \in \mathbf{N}$ và $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Chứng tỏ rằng các khẳng định sau là đúng:

(a) $f_n^+ \xrightarrow{\mu} f^+$,

(b) $f_n^- \xrightarrow{\mu} f^-$,

(c) $|f_n| \xrightarrow{\mu} |f|$;

trong đó, các hàm f_n^+, f_n^- được định nghĩa như sau (f^+, f^- cũng được định nghĩa tương tự):

$$f_n^+(x) = \max\{f_n(x), 0\}; \quad f_n^-(x) = -\min\{f_n(x), 0\}, \quad x \in A.$$

Bài 5.17. Gọi μ là độ đo Lebesgue trên $\mathbf{R}^n$. Giả sử $A \subset \mathbf{R}^n$, $\mu A < +\infty$ và $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ là một hàm số (hữu hạn). Chứng tỏ rằng nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một tập đóng $F \subset A$ sao cho $\mu(A \setminus F) < \epsilon$ và f liên tục trên F thì f đo được trên A.*

*Đây cũng là điều kiện cần và đủ để f đo được trên A.

MATH-EDUCARE

C. Bài tập ôn

Bài O1. Cho X là một tập khác rỗng tùy ý và $(S, \Im, \mu)$ là một không gian độ đo với $\Im$ là một σ-đại số. Giả sử $f : X \longrightarrow S$ là một song ánh. Đặt

$$\mathcal{A} = f^{-1}(\Im) := \{f^{-1}(A) \mid A \in \Im\},$$

và $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ xác định bởi, với mọi $B \in \mathcal{A}, B = f^{-1}(A)$, $\tilde{\mu}(B) = \mu A$.

(a) Chứng minh rằng $\mathcal{A}$ là một σ-đại số và $(X, \mathcal{A}, \tilde{\mu})$ là một không gian độ đo.

(b) Với mọi hàm $\Im$-đo được $g : S \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$, hàm $g \circ f : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là $\mathcal{A}$-đo được.

Bài O2. Cho $((S, \Sigma, \mu_i))_{i \in \mathbf{N}}$ là một họ các không gian độ đo với Σ là một σ-đại số và có một số $c \in \mathbf{R}$ sao cho $\mu_i(S) \leq c < +\infty$, mọi $i \in \mathbf{N}$. Giả sử $\mu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là một hàm tập xác định bởi

$$\mu A = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \mu_i A, \quad A \in \Sigma.$$

Chứng minh rằng μ là một độ đo trên Σ.

Bài O3. (*Độ đo trên một tập đo được*) Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo với $\mathcal{A}$ là một σ-đại số và $A \in \mathcal{A}$. Gọi $\mathcal{A}_A$ là σ-đại số định nghĩa ở Bài 1.8 và μ_A là thu hẹp của μ lên $\mathcal{A}_A$. Chứng tỏ rằng $(X, \mathcal{A}_A, \mu_A)$ là một không gian độ đo.

Bài O4. Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được và (S, d) là một không gian mêtric. Một ánh xạ $f : X \longrightarrow S$ sẽ được gọi là *đo được* nếu với mọi tập mở $G \subset S$ ta đều có $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$.

(a) Chứng tỏ rằng $f : X \longrightarrow S$ là đo được khi và chỉ khi $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ với mọi tập Borel B trong S.

WWW.MATHEDUCARE.COM

(b) Giả sử Y là một không gian mêtric và $g : S \longrightarrow Y$ liên tục còn $f : X \longrightarrow S$ đo được. Chứng tỏ rằng $g \circ f$ là một ánh xạ đo được.

Bài O5. Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được, $u, v : X \longrightarrow \mathbf{R}$ là các hàm số đo được còn $\Phi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục.

(a) Chứng tỏ rằng ánh xạ $f : X \longrightarrow \mathbf{R}^2$ xác định bởi $f(x) = (u(x), v(x))$ mọi $x \in X$ là đo được.

(b) Hàm $h(x) = \Phi(u(x), v(x))$ là một hàm đo được từ X vào $\mathbf{R}$.

(c) Bằng cách đặt $\Phi_1(s,t) := t + s$, $\Phi_2(s,t) := t.s$, hãy sử dụng các kết quả trên để suy ra rằng các hàm $u + v$, $u.v$ đều đo được.

[Hướng dẫn:

(a) Chú ý kết quả: mỗi tập mở trong $\mathbf{R}^2$ là hợp của một số không quá đếm được các tập có dạng $I_1 \times I_2$ (hình hộp mở) trong đó I_1, I_2 là các khoảng mở trong $\mathbf{R}$ (các hình hộp mở này không nhất thiết rời nhau từng đôi).

(b) Để chứng minh h là đo được, hãy sử dụng kết quả Bài O4].

Bài O6. Cho μ^* là một độ đo ngoài trên X và $(E_k)_{k \in N} \subset \mathcal{P}(X)$ sao cho

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k) < +\infty.$$

Gọi A là tập gồm tất cả những $x \in X$ sao cho x thuộc vào một số vô hạn những tập E_k của họ nói trên.

(a) Chứng tỏ rằng $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$.

(b) Chứng tỏ rằng $\mu^* A = 0$. Từ đây suy ra rằng A là μ^*-đo được.

Bài O7. *(Đầy đủ hóa một độ đo)* Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là

MATH-EDUCARE

không gian độ đo với $\mathcal{A}$ là một σ-đại số. Gọi

$$\mathcal{A}' = \{Z \in \mathcal{P}(X) \mid \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A}. A_1 \subset Z \subset A_2, \text{ và } \mu(A_2 \setminus A_1) = 0\}.$$

Khi đó, với mỗi $Z \in \mathcal{A}'$ đều có $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ sao cho $A_1 \subset Z \subset A_2$ và $\mu(A_2 \setminus A_1) = 0$. Ta đặt $\mu' Z = \mu A_1$. Chứng tỏ rằng

(a) $\mathcal{A}'$ là một σ-đại số,

(b) μ' là một độ đo trên $\mathcal{A}'$,

(c) μ' là độ đo đủ và μ' là một mở rộng của μ lên $\mathcal{A}'$ và

(d) $(X, \mathcal{A}', \mu')$ là mở rộng đầy đủ tối tiểu của $(X, \mathcal{A}, \mu)$ theo nghĩa: Nếu (X, Σ, ν) là một mở rộng khác của $(X, \mathcal{A}, \mu)$ và ν là độ đo đủ thì $\mathcal{A}' \subset \Sigma$ và $\nu_{|\mathcal{A}'} = \mu'$.

Bài O8. Gọi N là tập các số tự nhiên và $\mathcal{A} = \mathcal{P}(N)$. Xét hàm tập $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ định nghĩa bởi:

$$\mu(A) = \begin{cases} n & \text{nếu A có n phần tử ,} \\ +\infty & \text{nếu A vô hạn .} \end{cases}$$

(a) Chứng minh μ là một độ đo σ-hữu hạn trên $\mathcal{A}$.

(b) Hãy chỉ ra trong không gian độ đo $(\mathbf{N}, \mathcal{A}, \mu)$ một dãy $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ sao cho $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ nhưng $\mu(\cap_n A_n) \neq \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu A_n$.

Bài O9. Giả sử X là một không gian mêtric mà họ các tập mở tạo thành một σ-đại số. Hãy xác định họ các tập mở của không gian này.

Bài O10. Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo và $(A_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{A}$. Chứng minh rằng

(i) $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n)) \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} \mu A_n$.

(ii) $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty}(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n)) \geq \overline{\lim}_{n \to \infty} \mu A_n$ nếu $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n) < \infty$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

(iii) Giả sử thêm rằng

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n\Big) = \bigcap_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\Big) = B \text{ và } \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n\Big) < \infty.$$

Hãy chứng tỏ $\liim_{n\to\infty} \mu A_n$ tồn tại và $\lim_{n\to\infty} \mu A_n = \mu B$.

Bài O11. Cho μ^* là một độ đo ngoài trên X. Giả sử tập $A \subset X$ có tính chất: với mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại một tập μ^*-đo được E sao cho $\mu^*(A\Delta E) < \epsilon$. Chứng minh rằng tập A là μ^*-đo được.

Bài O12. Cho $(E_n)_n$ là một dãy các tập con đo được Lebesgue của $[0.1]$ thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} \mu E_n = 1$. Chứng minh rằng với mọi $\alpha < 1$, tồn tại một dãy con $(E_{n_k})_k \subset (E_n)_n$ sao cho $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}) > \alpha$.

Bài O13. Giả sử f: $[0,1] \to \mathbf{R}$ là hàm số hữu hạn và đo được (L). Chứng minh tồn tại duy nhất số a_0 sao cho

$$\mu\Big(\{x \in [0,1] \mid f(x) \geq a_0\}\Big) \geq \frac{1}{2} \text{ và}$$

$$\mu\Big(\{x \in [0,1] \mid f(x) \geq a\}\Big) < \frac{1}{2}$$

khi $a_0 < a < \infty$.

Bài O14. (*Định lí Steinhaus*) Chứng minh rằng nếu $A \subset \mathbf{R}$ là tập đo được Lebesgue và $\mu E > 0$ thì 0 là một điểm trong của tập $A - A$, trong đó $A - A = \{x - y \mid x, y \in A\}$.

[Hướng dẫn. Sử dụng Bài 4.5 để có $K \subset A$, $U \supset K$, U mở và K compact sao cho $\mu U < 2\mu K$. Gọi $\delta = d(K, \mathbf{R} \setminus U) > 0$ thì $(-\delta, \delta) \subset (A, -A)$.]

Bài O15. Cho (X, Σ) là một không gian đo được, f : $X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ và $Y = f^{-1}(\mathbf{R})$. Khi đó, f là đo được khi và chỉ khi $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \Sigma$, $f^{-1}(\{\infty\}) \in \Sigma$ và f là đo được trên Y.

Bài O16. Giả sử $(f_k)_k$ là một dãy các hàm đo được hội tụ theo độ đo về hàm f trên A. Chứng minh rằng $(f_k)_k$ là dãy cơ bản theo độ đo, nghĩa là

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{k,i \to \infty} \mu\{x \in A \mid |f_k(x) - f_i(x)| \geq \epsilon\} = 0.$$

Bài O17. Giả sử $(f_k)_k$ là một dãy các hàm đo được trên A với giá trị trong $\mathbf{R}$, thoả mãn điều kiện

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{k,i \longrightarrow \infty} \mu\{x \in A \mid |f_k(x) - f_i(x)| \geq \epsilon\} = 0.$$

Chứng tỏ rằng khi đó tồn tại một dãy con $(f_{k_i})_i$ của $(f_k)_k$ sao cho $(f_{k_i})_i$ hội tụ h.k.n. trên A về một hàm có giá trị hữu hạn và đo được trên A.

Bài O18. Giả sử $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được, $A \in \mathcal{A}$ và $f\colon A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$. Khi đó f là $\mathcal{A}$-đo được (trên A) khi và chỉ khi

(i) $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$ và $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$,

(ii) $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ với mọi tập Borel B trong $\mathbf{R}$.

Bài O19. Cho $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ là một hàm khả vi. Hãy chứng tỏ rằng đạo hàm f' của nó là một hàm đo được (Borel hay Lebesgue).

Bài O20. Giả sử $\phi : \overline{\mathbf{R}} \to \overline{\mathbf{R}}$ là một hàm sao cho $\overline{\mathbf{R}}[\, f(x) \geq a] \cap \mathbf{R} \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ với mọi $a \in \mathbf{R}$. Chứng tỏ rằng nếu $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ là một hàm $\mathcal{A}$-đo được thì $\phi \circ f\colon A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là hàm $\mathcal{A}$-đo được.

Bài O21. Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo đươc, $A \in \mathcal{A}$ và $f, g : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là các hàm đo được. Gọi $h, k, l : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là các hàm xác định lần lượt như sau, $x \in A$,

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & \text{nếu } f(x) \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ \beta_0 & \text{nếu } f(x) = 0, \\ \beta_+ & \text{nếu } f(x) = +\infty, \\ \beta_- & \text{nếu } f(x) = -\infty, \end{cases}$$

MATH-EDUCARE

$$k(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) & \text{nếu } f(x) + g(x) \text{ có nghĩa,} \\ \beta & \text{tất cả các trường hợp còn lại,} \end{cases}$$

$$l(x) = \begin{cases} f(x).g(x) & \text{nếu } f(x).g(x) \text{ có nghĩa,} \\ \beta & \text{các trường hợp còn lại,} \end{cases}$$

trong đó β, β_-, β_+ là các số tuỳ ý và cố định thuộc $\overline{\mathbf{R}}$. Chứng tỏ rằng h, k, l là các hàm đo được trên A.

Bài O22. Cho $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Giả sử rằng tồn tại $C > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \text{ với mọi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Chứng tỏ rằng nếu $A \subset \mathbf{R}$ và $\mu A = 0$ thì $\mu(f(A)) = 0$ (μ là độ đo Lebesgue).

Bài O23. Giả sử $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là hàm thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \text{ với mọi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Chứng minh các khẳng định sau:

(a) $f(rx) = rf(x)$ với mọi $x \in \mathbf{R}$ và mọi $r \in \mathbf{Q}$.

(b) Nếu f bị chặn ở trên một khoảng nào đó thì f liên tục tại 0.

(c) Nếu f liên tục tại một điểm nào đó, chẳng hạn, tại 0, thì f liên tục trên $\mathbf{R}$.

(d) Nếu f liên tục trên $\mathbf{R}$ thì $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbf{R}$, trong đó $a = f(1)$.

(e) Nếu f là hàm đo được Lebesgue thì $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Bài O24. Cho X là một không gian mê tric đầy đủ và khả li, μ là độ đo hữu hạn trên σ-đại số Borel $\mathcal{B}(X)$. Chứng minh rằng với mọi số dương ϵ, tồn tại tập compact $K \subset X$ sao cho $\mu(X \setminus K) < \epsilon$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

Bài O25. Cho $(X, \mathcal{M}, \mu)$ là không gian độ đo với $\mathcal{M}$ là một σ-đại số. Gọi T là một tập không rỗng của $\mathbf{R}$ và $t_0 := \sup T$, $t_0 \notin T$. Giả sử $(A_t)_{t\in T}$ là một họ tập hợp thuộc $\mathcal{M}$ sao cho $A_{t'} \subset A_t$ nếu $t' < t$. Chứng minh rằng

$$\bigcup_{t\in T} A_t \in \mathcal{M} \quad \text{và} \quad \mu\Big(\bigcup_{t\in T} A_t\Big) = \lim_{t\to t_0} \mu(A_t).$$

Bài O26. Cho không gian độ đo $(X, \mathcal{R}, \mu)$. Với một tập hợp bất kì $A \subset X$, ta đặt

$$\mu^*(A) := \inf_{A\subset B\in\mathcal{R}} \mu(B).$$

Chứng minh rằng

(a) μ^* là một độ đo ngoài trên X và

(b) $\mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$ và $\mathcal{R}$ chứa trong σ-đại số các tập μ^*-đo được.

Bài O27. Chứng minh rằng hai hàm số liên tục trên một khoảng mở của $\mathbf{R}$ là tương đương đối với độ đo Lebesgue khi và chỉ khi chúng bằng nhau tại mọi điểm của khoảng đó.

Bài O28. Cho hàm số $f : A \to \bar{\mathbf{R}}$ đo được trên tập hợp A. Chứng minh rằng hàm số

$$f|_a^b(x) = \begin{cases} a \text{ nếu } f(x) < a \\ f(x) \text{ nếu } a \le f(x) \le b \\ b \text{ nếu } f(x) > b \end{cases}$$

đo được trên A.

Bài O29. Giả sử f là hàm số đo được Lebesgue trên đường thẳng thực. Chứng minh rằng tồn tại một hàm số g đo được Borel sao cho $f(x) = g(x)$ hầu khắp nơi.

Bài O30. Giả sử (f_n) và f là những hàm đo được trên tập A và $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Chứng minh rằng nếu $f(x) \neq 0$ và $f_n(x) \neq 0$ với mọi $x \in A$ và mọi $n \in \mathbf{N}$ thì $1/f_n \xrightarrow{\mu} 1/f$ trên A.

MATH-EDUCARE

Bài O31. Giả sử $f, f_1, f_2, \ldots$ là những hàm số đơn điệu trên khoảng mở $I \subset \mathbf{R}$ và f_n hội tụ theo độ đo (L) về f trên I. Chứng minh rằng $f_n(x) \to f(x)$ tại mỗi điểm liên tục của f.

Bài O32. Cho $(X, \mathcal{M}, \mu)$ là một không gian độ đo và $\mathcal{A}$ là họ tất cả các tập con đo được của X có độ đo hữu hạn.

(a) Chứng minh rằng $\mathcal{A}$ là một nửa vành.

(b) Ta định nghĩa quan hệ $\sim$ trên $\mathcal{A}$ như sau: $A \sim B$ nếu $\mu(A \Delta B) = 0$. Chứng tỏ rằng $\sim$ là một quan hệ tương đương trên $\mathcal{A}$.

(c) Gọi D là tập hợp các lớp tương đương của $\mathcal{A}$. Nếu $A \in \mathcal{A}$, ta kí hiệu $\bar{A}$ là lớp tương đương của A trong D. Với $\bar{A}, \bar{B} \in D$, đặt $d(\bar{A}, \bar{B}) = \mu(A \Delta B)$. Chứng minh rằng (D, d) là một không gian mêtric đầy đủ .

Bài O33. Cho $(X, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ và $(X, \mathcal{S}_2, \mu_2)$ là hai không gian độ đo. Chứng minh rằng μ_1 và μ_2 cùng sinh một độ đo ngoài trên X nếu và chỉ nếu $\mu_1 = \mu_{2|\mathcal{S}_1}^*$ và $\mu_2 = \mu_{1|\mathcal{S}_2}^*$.

Bài O34. Cho $(X, \mathcal{S}, m)$ là một không gian độ đo với độ đo m là σ-hữu hạn, $\mathcal{S}$ là một nửa vành và gọi μ là thác triển tiêu chuẩn của m lên σ-đại số $\mathcal{L}$ các tập m^*-đo được. Giả sử Σ cũng là một nửa vành sao cho $\mathcal{S} \subset \Sigma \subset \mathcal{L}$ và ν là một độ đo trên Σ. Chứng minh rằng nếu $\nu = m$ trên $\mathcal{S}$ thì $\nu = m^*$ trên Σ. Từ đây hãy suy ra rằng mở rộng tiêu chuẩn μ là mở rộng duy nhất của m thành một độ đo trên $\mathcal{L}$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

D. Bài giải, Hướng dẫn

1.1. Độc giả tự giải.

1.2. Hướng dẫn. Gọi

$$\mathcal{S} = \{B \subset S \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Chứng minh rằng $\mathcal{S}$ là một σ-đại số. Từ đây dễ suy ra được rằng $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$.

1.3. Độc giả tự giải.

1.4. Độc giả tự giải.

1.5.

Đặt $E_n = A_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} A_i$. Khi đó dễ dàng thấy rằng $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Ngoài ra, theo Bổ đề 1.2.4, với mỗi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại hữu hạn các $C_{n1}, C_{n2}, \ldots, C_{nk_n} \in \mathcal{R}$ sao cho $C_{nk} \cap C_{nj} = \emptyset$ khi $j \neq k$ và $\bigcup_{j=1}^{k_n} C_{nj} = E_n$. Như thế

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k_n} C_{nj}.$$

Họ $(C_{nj})_{n,j \in \mathbf{N}}$ là họ tập cần tìm.

1.6. Hướng dẫn. Dễ thấy rằng $B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ và các tập D_i rời nhau từng đôi.

1.7.

(a) Hiển nhiên.

(b) Giả sử $\mathcal{R}$ là một vành đơn điệu và $(A_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$. Ta sẽ chứng minh rằng $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$.

Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, đặt $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Khi đó vì $\mathcal{R}$ là một vành nên ta có $B_n \in \mathcal{R}$, $B_n \subset B_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbf{N}$ và $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset A$.

MATH-EDUCARE

Mặt khác, nếu $x \in A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ thì có $n_0 \in \mathbf{N}$ để $x \in A_{n_0}$ và do đó $x \in B_{n_0}$. Vậy $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Tức là $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Vì $(B_n)_n$ là dãy tập thuộc $\mathcal{R}$, đơn điệu tăng và $\mathcal{R}$ là đơn điệu nên $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{R}$. Vậy $\mathcal{R}$ là một σ-vành □

1.8. Độc giả tự giải.

1.9.

Rõ ràng $X \in \mathcal{A}$ và $\mathcal{A}$ đóng kín với phép lấy phần bù. Giả sử $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{A}$. Nếu mỗi A_n $(n \in \mathbf{N})$ đều không quá đếm được thì $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ cũng không quá đếm được nên $A \in \mathcal{A}$. Nếu ngược lại, có một tập A_k nào đó không đếm được thì A_k^c (phần bù của A_k trong X) không qúa đếm được. Từ đây ta được

$$A^c = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subset A_k^c.$$

Do đó A^c không quá đếm được hay $A \in \mathcal{A}$. Vậy $\mathcal{A}$ là một σ-đại số.

Gọi $\mathcal{S}$ là σ-đại số sinh bởi họ tập $(\{x\})_{x\in X}$. Khi đó $\mathcal{S}$ sẽ chứa mọi tập hợp không quá đếm được và do đó cũng chứa mọi tập hợp con của X có phần bù không quá đếm được. Vậy $\mathcal{S} \supset \mathcal{A}$ mà $\mathcal{A}$ là một σ-đại số nên $\mathcal{A} = \mathcal{S}$. Ta được điều phải chứng minh □

1.10.

(a) Rõ ràng rằng $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{B}(\mathbf{R})$ nên nếu gọi $\mathcal{A}$ là σ-đại số sinh bởi $\mathcal{E}_1$ thì $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbf{R})$. Ngược lại, mỗi tập mở trong $\mathbf{R}$ đều là hợp của một họ hữu hạn hay đếm được các khoảng mở đôi một không giao nhau nên $\mathcal{A}$ chứa họ các tập mở trong $\mathbf{R}$. Do đó $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(\mathbf{R})$. Vậy ta được $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbf{R})$, là điều phải chứng minh.

Các Câu (b) - (i) có thể được chứng minh tương tự □

2.1. Phép chứng minh là đơn giản, xin độc giả tự tiến hành.

WWW.MATHEDUCARE.COM

2.2.
(i) $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} mA_i = 0.$
(ii) Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì

$$m(A \cup B) = mA + mB = mA.$$

Nếu $A \cap B \neq \emptyset$ thì $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (để ý $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$). Vì $\mathcal{R}$ là nửa vành nên có

$$C_1, C_2, \ldots, C_k \in \mathcal{R},\ C_j \cap C_j = \emptyset \text{ và } \bigcup_{i=1}^{k} C_i = B \setminus A.$$

Hơn nữa, vì $C_i \subset B$ nên $mC_i \leq mB = 0$. Vậy $mC_i = 0$ mọi $i = 1, 2, \ldots, k$. Như vậy, $A \cup B = A \cup (\bigcup_{i=1}^{k} C_i)$ và vì $A \cap C_i = \emptyset$ với mọi i nên

$$m(A \cup B) = mA + \sum_{i=1}^{k} mC_i = mA.$$

Tương tự như vậy, ta có thể biểu diễn

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{k} C_i,\ \ C_i \in \mathcal{R},\ i = 1, 2, \ldots, k$$

và $C_i \cap C_j = \emptyset$ nếu $i \neq j$. Do đó (để ý $B \cap C_i = \emptyset$ mọi i), $A = B \cup (\bigcup_{i=1}^{k} C_i)$ và

$$mA = mB + \sum_{i=1}^{k} mC_i = \sum_{i=1}^{k} mC_i = m(A \setminus B) \quad \square$$

2.3. Chúng ta chỉ còn phải chứng minh m là σ-cộng tính. Cho

$$(A_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{R},\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ nếu } i \neq j \text{ và } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

(α) Giả sử điều kiện (i) thỏa mãn. Đặt

$$B_1 = A_1,\ B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_n,\ n \in \mathbf{N}.$$

Khi đó

$$B_n \subset B_{n+1} \text{ với mọi } n \in \mathbf{N} \text{ và } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{R}.$$

Do đó theo (ii) và tính cộng tính của m ta được

$$mA = \lim_{n\to\infty} mB_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} mA_i = \sum_{i=1}^{\infty} mA_i. \qquad (*)$$

(β) Dễ thấy rằng nếu có một $i \in \mathbf{N}$ mà $mA_i = +\infty$ thì $(*)$ đúng. Giả sử rằng $mA_i < +\infty$ với mọi $i \in \mathbf{N}$. Với các tập B_n định nghĩa như trong (α) thì

$$\emptyset = A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \setminus B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n,$$

trong đó, $C_n := A \setminus B_n$, $n \in \mathbf{N}$. Để ý rằng $C_n \supset C_{n+1}$ với mọi n nên theo giả thiết (ii),

$$\lim_{n\to\infty} mC_n = \lim_{n\to\infty} m(A \setminus B_n) = 0. \qquad (**)$$

Mặt khác, với mọi $n \in \mathbf{N}$, $mB_n = \sum_{i=1}^{n} mA_i < +\infty$. Từ đây, $B_n \subset A$ và từ tính cộng tính của m ta suy ra

$$m(A \setminus B_n) = mA - mB_n \text{ với mọi } n \in \mathbf{N}.$$

Bây giờ $(**)$ cho

$$mA = \lim_{n\to\infty} mB_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} mA_i = \sum_{i=1}^{\infty} mA_i,$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

chính là (*) □

2.4.

(a) Đặt $B_1 := A_1, B_n := A_{n+1} \setminus A_n$, $n = 2, 3, \ldots$. Khi đó với mọi $n \neq n'$ thì $B_n \cap B_{n'} = \emptyset$ và

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Từ tính σ-cộng tính (và do đó cộng tính) của μ ta được

$$\mu A_n = \sum_{i=1}^{n} \mu B_i, \quad \mu A = \sum_{i=1}^{\infty} \mu B_i.$$

Vậy $\lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

(b) Giả sử μA_1 hữu hạn (trường hợp còn lại đề nghị người đọc tự chứng minh). Để ý rằng

$$B := A_1 \setminus A = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n)$$

với $B_n := A_1 \setminus A_n$, $n \in \mathbf{N}$. Dễ dàng nhận thấy dãy $(B_n)_n$ là dãy đơn điệu tăng, nghĩa là $B_n \subset B_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Ngoài ra, vì $\mu(A_1)$ hữu hạn nên

$\mu(B) = \mu(A_1) - \mu(A)$ và $\mu(B_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$ với mọi n.

Từ đây và (a) ta có

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(A_1) - \mu(A) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(B_n) \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \mu(A_1) - \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

Kết luận ở (b) được suy ra từ các đẳng thức này và giả thiết μA_1 hữu hạn □

WWW.MATHEDUCARE.COM

2.5.

Đặt $B_1 := A_1$ và $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ với $n \geq 2$. Khi đó

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad B_n \cap B_{n'} = \emptyset \text{ với mọi } n \neq n'.$$

Theo Bổ đề 1.1.15,

$$B_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} C_{n,i}, \; C_{n,i} \in \mathcal{R}, \; C_{n,i} \cap C_{n,j} = \emptyset \text{ khi } i \neq j.$$

Để ý rằng với mỗi $n \in \mathbf{N}$,

$$A_\ell = \cup_{n=1}^{\ell} B_n = \cup_{n=1}^{\ell} \cup_{j=1}^{k_n} C_{nj}, \quad mA_\ell = \sum_{n=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{k_n} mC_{ij}$$

vì rõ ràng là $C_{ij} \cap C_{i'j'} = \emptyset$ khi $(i,j) \neq (i',j')$. Từ đây ta có

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k_n} C_{nj},$$

$$\begin{aligned} mA &= \sum_{n=1}^{\infty} [\sum_{j=1}^{k_n} mC_{nj}] \\ &= \lim_{\ell \to \infty} [\sum_{n=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{k_n} mC_{nj}] \\ &= \lim_{\ell \to \infty} mA_\ell. \quad \square \end{aligned}$$

2.6. Độc giả tự giải.

2.7. Hướng dẫn. Hãy xây dựng một tập $B \in \mathcal{R}$ sao cho $E \subset B$ và $\mu B = 0$.

MATH-EDUCARE

2.8. Hướng dẫn. Để ý $A \cap B \in \mathcal{R}$ và $A \setminus (A \cap B) = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ với $C_i \cap C_j = \emptyset$ nếu $i \neq j$ và $C_i \in \mathcal{R}$ với mọi i.

2.9. Hướng dẫn. Xem phần đầu của phép chứng minh Bài 3.3.

2.10.

Rõ ràng là $m \geq 0$ và $m(\emptyset) = 0$. m là hữu hạn vì

$$m(E) \leq m(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i m_i(X) < +\infty.$$

Hơn nữa, nếu $(E_k)_{k \in \mathbf{N}}$ là một dãy các phần tử của $\mathcal{B}$, rời nhau từng đôi một và $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{B}$ thì với mọi $n \in \mathbf{N}$, $m_n(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m_n E_k$. Do đó với mọi $N \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} m_n E = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n m_n(E) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \sum_{k=1}^{\infty} m_n E_k.$$

Cho $N \to \infty$ ta được

$$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n m_n E_k = \sum_{k=1}^{\infty} m E_k.$$

Vậy m là một độ đo hữu hạn trên $\mathcal{B}$ □

2.11.

Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập thuộc $\mathcal{S}$, rời nhau từng đôi một. Đặt $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Nếu với mọi i, A_i đều là tập hữu hạn thì A cũng vậy và ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \mu A_i = \mu A = 0.$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

Trái lại, nếu có i_0 sao cho A_{i_0} là đếm được thì A cũng là tập đếm được và do đó,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu A_i = \mu A = \infty.$$

Để chứng tỏ μ không là σ-cộng tính, ta hãy lấy tập số tự nhiên $\mathbf{N}$. Ta có $\mathbf{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}$. Tuy nhiên

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{n\}) = 0 < \mu\mathbf{N} = +\infty \quad \square$$

2.12. Ta lưu ý rằng nếu A là một tập đếm được và $f \geq 0$ thì với mọi song ánh σ: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, tổng của các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_{\sigma(n)})$ luôn là một số không đổi (số này được kí hiệu là $\sum_{x \in A} f(x)$).

Rõ ràng $\mu(A) \geq 0$ với mọi $A \in \mathcal{M}$. Giả sử $(A_n)_n \subset \mathcal{M}$ là một họ các tập đôi một rời nhau. Đặt $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Nếu có một A_n nào đó là tập không đếm được thì A cũng không đếm được và vì vậy $\mu(A) = \infty = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Giả sử tất cả các tập A_n đều hữu hạn hoặc đếm được. Khi đó A cũng hữu hạn hoặc đếm được và

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{x \in A_n} f(x) \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Trường hợp có những tập $A_n = \emptyset$, ta cũng có

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Vậy μ là một độ đo $\square$

3.1.

Gọi

$$\alpha = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} mA_n \mid (A_n)_n \subset \mathcal{R},\ A_n \cap A_{n'} = \emptyset \text{ nếu } n \neq n',\ \bigcup_n A_n \supset A\},$$

$$\beta = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} mA_n \mid (A_n)_n \subset \mathcal{R},\ \bigcup_n A_n \supset A\}.$$

Rõ ràng rằng $\alpha \geq \beta$. Ta còn phải chứng minh $\alpha \leq \beta$.

Giả sử $(A_n)_n \subset \mathcal{R}$, $\bigcup_n A_n \supset A$. Theo Bài tập 1.5, tồn tại $(B_m)_m \subset \mathcal{R}$ sao cho các tập B_m rời nhau từng đôi một và với mỗi m, B_m được chứa trong ít nhất một tập A_n nào đó và sao cho $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Lúc này

$$m(\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m) = \sum_{m=1}^{\infty} mB_m \leq m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} mA_n.$$

Từ đây, $\alpha \leq \beta$ $\square$

3.2.

Điều kiện cần là hiển nhiên. Để chứng minh điều kiện đủ, lấy tùy ý $E \subset X$ và ta sẽ chứng tỏ rằng

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c). \qquad (*)$$

Nếu $\mu^*(E) = +\infty$ thì hiển nhiên $(*)$ đúng. Giả sử $\mu^*(E) < +\infty$ và $\epsilon > 0$ tùy ý. Khi đó tồn tại $(E_n)_n \subset \mathcal{R}$ với

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \mu^*(E) + \epsilon.$$

Khi đó $\mu(E_n) < +\infty$ mọi $n \in \mathbf{N}$ và ta có

$$\mu^*(E_n) \geq \mu^*(E_n \cap A) + \mu^*(E_n \cap A^c)$$

theo giả thiết. Từ đây,

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \\
&\leq \mu^*((\cup_n E_n) \cap A) + \mu^*((\cup_n E_n) \cap A^c) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n \cap A^c) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} [\mu^*(E_n \cap A) + \mu^*(E_n \cap A^c)] \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \mu^*(E) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Vì $\epsilon > 0$ tùy ý nên $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ là bất đẳng thức $(*)$ mà ta phải chứng minh $\square$

3.3.

(α) Trước hết ta chứng minh rằng nếu $E_1, E_2, \ldots, E_n$ là các tập μ-đo được (tức thuộc $\mathcal{L}$), rời nhau từng đôi thì

$$\mu(A \cap [\overset{n}{\underset{n=1}{\cup}} E_i]) = \sum_{n=1}^{n} \mu(A \cap E_i) \text{ với mọi } A \subset X. \quad (*)$$

Ta chứng minh $(*)$ bằng quy nạp theo n. Hiển nhiên $(*)$ đúng khi $n = 1$. Giả sử $(*)$ đúng với n. Ta chứng minh $(*)$ đúng với $n + 1$. Giả sử $E_1, E_2, \ldots, E_n, E_{n+1}$ là các tập μ-đo được, rời nhau từng đôi một. Nếu $A \subset X$ thì

$$A \cap [\overset{n+1}{\underset{i=1}{\cup}} E_i] \cap E_{n+1} = A \cap E_{n+1},$$

MATH-EDUCARE

$$A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right] \cap E_{n+1}^c = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

Vì E_{n+1} là μ-đo được nên

$$\begin{aligned}\mu\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right]\right) &= \mu\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right] \cap E_{n+1}\right) + \\ &\quad + \mu\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right] \cap E_{n+1}^c\right) \\ &= \mu(A \cap E_{n+1}) + \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \mu(A \cap E_i).\end{aligned}$$

(β) Bây giờ giả sử $(E_n)_n$ là một dãy các tập μ-đo được và rời nhau từng đôi trong X. Ta sẽ chứng tỏ bất đẳng thức sau là đúng:

$$\mu\left(A \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n) \quad \text{với mọi} \quad A \subset X. \qquad (**)$$

Trước hết để ý rằng $A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n)$. Do đó bất đẳng thức

$$\mu\left(A \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right]\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n) \quad \text{với mọi} \quad A \subset X$$

được suy ra từ tính σ-nửa cộng tính của μ.

Mặt khác, từ (*) ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap E_i) = \mu\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]\right) \leq \mu\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right]\right)$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

với mọi $n \in \mathbf{N}$ và do đó,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap E_i) \leq \mu(A \cap [\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i]) \quad \square$$

3.4.

Nếu $A \in \mathcal{L}$ thì chỉ việc chọn $E = A$ để có $\mu(A \setminus E) = 0 < \epsilon$ với mọi $\epsilon > 0$.

Ngược lại nếu $(*)$ thoả mãn thì khi đó với mọi $n \in \mathbf{N}$ có $E_n \in \mathcal{L}$, $E_n \subset A$ sao cho $\mu(A \setminus E_n) < \frac{1}{n}$. Đặt $E = \bigcup_n E_n$ thì $E \in \mathcal{L}$ và $A \setminus E \subset A \setminus E_n$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Vì thế

$$\mu(A \setminus E) \leq \mu(A \setminus E_n) < \frac{1}{n} \text{ với mọi } n \in \mathbf{N}.$$

Vậy $\mu(A \setminus E) = 0$ và do đó, $A \setminus E \in \mathcal{L}$ và $A = E \cup (A \setminus E) \in \mathcal{L}$ $\square$

3.5.

Đặt $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ và lưu ý rằng $A \cap B_n = A_n$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Do đó theo Bài 3.3 ta có

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(A \cap [\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n]) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n \quad \square$$

3.6. Độc giả tự giải.

3.7.

Theo đề bài $\mu(\emptyset) = 0$ và $\mu(A) \geq 0$ với mọi $A \subset X$. Ta chỉ còn phải chứng tỏ μ là σ-nửa cộng tính. Giả sử $E \subset X$ và $(E_n)_n$ là một dãy các tập con của X sao cho $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = +\infty$ thì hiển nhiên là $\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$. Vì thế ta giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$ và $\epsilon > 0$ là một số tùy ý. Khi đó, do định nghĩa hàm μ, với mỗi $n \in \mathbf{N}$ có dãy $(E_n^k)_k \subset \mathcal{F}$ sao cho $E_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_n^k$ và

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(E_n^k) < \mu(E_n) + 2^{-n}.\epsilon.$$

Rõ ràng rằng $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_n^k$ và vì thế lại do định nghĩa của μ, ta có:

$$\begin{aligned} \mu(E) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f(E_n^k) < \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu(E_n) + 2^{-n}.\epsilon\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) + \epsilon. \end{aligned}$$

Vì $\epsilon > 0$ tùy ý nên

$$\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \quad \square$$

3.8.

Từ định nghĩa độ đo ngoài m^* và Bài tập 3.1, với mỗi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại một họ $(C_{n,i})_{i \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$ rời nhau từng đôi sao cho $C_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{n,i} \supset A$ và

$$\mu C_n = \sum_{i=1}^{\infty} m C_{n,i} < m^* A + \frac{1}{n}.$$

MATH-EDUCARE

Đặt $A_1 = C_1$, $A_n = A_{n-1} \cap C_n$, $n \in \mathbf{N}$.

Rõ ràng theo cách định nghĩa thì $A_{n+1} \subset A_n$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Ta chứng minh A_n thỏa mãn có biểu diễn ở (ii). Rõ ràng A_1 thỏa mãn điều kiện này vì $A_1 = C_1 = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} C_{n,i}$ với các $C_{n,i} \in \mathcal{R}$ và rời nhau từng đôi. Giả sử

$$A_{n-1} = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} A_{n-1,i},\ A_{n-1,i} \cap A_{n-1,j} = \emptyset,\ \text{nếu } i \neq j$$
$$\text{và } A_{n-1,i} \in \mathcal{R}.$$

Khi đó

$$A_n = A_{n-1} \cap C_n = \left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} A_{n-1,i}\right) \cap \left(\overset{\infty}{\underset{j=1}{\cup}} C_{n,j}\right)$$
$$= \bigcup_{i,j \in \mathbf{N}} (A_{n-1,i} \cap C_{n,j}) = \bigcup_{i,j \in \mathbf{N}} D_{i,j},$$

trong đó $D_{i,j} = A_{n-1,i} \cap C_{n,j} \in \mathcal{R}$. Các tập $D_{i,j}$ rời nhau từng đôi ($i, j \in \mathbf{N}$). Vậy A_n cũng có dạng trong (ii). Ngoài ra,

$$A_n \in \mathcal{L},\ A \subset A_n,\ \mu A_n \leq \mu C_n < +\infty \text{ với mọi } n.$$

Vậy $(A_n)_n$ nghiệm đúng (i) và (ii).

Nếu $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cap}} A_n$ thì $H \in \mathcal{L}$, $H \supset A$, $\mu H = \lim_n \mu A_n$. Lúc này với mọi $n \in \mathbf{N}$,

$$m^* A \leq \mu A_n \leq \mu C_n < m^* A + \frac{1}{n}.$$

Cho $n \to \infty$ trong bất đẳng thức trên ta được $\mu H = m^* A$ và (iii) cũng đã được chứng minh □

WWW.MATHEDUCARE.COM

3.9.

Giả sử $m^*A < +\infty$ và ϵ là một số dương cho trước. Khi đó theo định nghĩa của m^*, tồn tại $(P_i)_{i\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$ sao cho $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \supset A$ và

$$\sum_{i=1}^{\infty} mP_i < m^*A + \epsilon.$$

Đặt $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ thì rõ ràng là $B \supset A$, $B \in \mathcal{R}$ (vì $\mathcal{R}$ là một σ-vành). Ngoài ra,

$$mB \leq \sum_{i=1}^{\infty} mP_i < m^*A + \epsilon.$$

Vậy (a) được chứng minh.

(b) Nếu $m^*A = +\infty$ thì với mọi $E \in \mathcal{R}$, $E \supset A$ ta đều có $m^*A \leq m^*E = \mu E$. Do vậy $\mu E = +\infty$ và do đó,

$$\inf\{\mu E \mid E \in \mathcal{R},\ E \supset A\} = +\infty = m^*A.$$

Giả sử $m^*A < +\infty$. Nếu $E \in \mathcal{R}$, $E \supset A$ thì do $m^*A \leq m^*E = \mu E$ ta được

$$m^*A \leq \inf\{\mu E \mid E \in \mathcal{R},\ E \supset A\}.$$

Điều này cùng với kết quả ở (a) cho ta

$$m^*A = \inf\{\mu E \mid E \in \mathcal{R},\ E \supset A\}.$$

(c) Theo (a), với mỗi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại $B_n \in \mathcal{R}$ sao cho $B_n \supset A$ và

$$mB_n < m^*A + \frac{1}{n}.$$

MATH-EDUCARE

Đặt $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Khi đó $C \in \mathcal{R}$, $C \supset A$ và

$$\mu C \leq \mu B_n < m^*A + \frac{1}{n}, \text{ mọi } n \in \mathbf{N}.$$

Từ đây, $\mu C \leq m^*A$. Mặt khác, do $A \subset C$ nên $m^*A \leq m^*C = \mu C$. Vậy $\mu C = m^*A$ □

3.10. Độc giả tự giải.

3.11. Hướng dẫn.

(b) Độ đo ngoài m^* được xác định bởi công thức

$$m^*A = \begin{cases} 0 & \text{nếu } A = \emptyset, \\ 1 & \text{nếu } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

(c) Hãy chứng tỏ rằng nếu $A \subset X$ mà $A \neq X$ và $A \neq \emptyset$ thì A không phải là tập m^*-đo được. Kết quả là $\mathcal{L} = \mathcal{R}$.

3.12. Hướng dẫn. Chứng minh tương tự như bài 3.9.

3.13. Hướng dẫn. (b) Hãy chứng tỏ $m^*(K \setminus E) = 0$.

3.14. Độc giả tự giải.

4.1. Độc giả tự giải.

4.2. Độc giả tự giải.

4.3. Hướng dẫn. Giả sử $\mu(A) = 0$. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$ và $\epsilon > 0$, tồn tại họ $(\Delta_{n,i})_{i \in \mathbf{N}}$ sao cho

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_{n,i} \text{ và } \sum_{i=1}^{\infty} |\Delta_{n,i}| < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Họ $\{\Delta_{n,i} \mid n, i \in \mathbf{N}\}$ là họ phải tìm.

4.4.

(a) Thật vậy, không mất tính tổng quát (nếu cần thì sắp xếp lại các gian) ta có thể giả sử rằng $P_i = \langle c_i, c_{i+1} \rangle$, $i =$

WWW.MATHEDUCARE.COM

$1, 2, ..., k$, $P = \langle a, b\rangle$ và $c + 1 = a < c_2 < \cdots < c_{k+1} = b$. Khi đó

$$\sum_{i=1}^{k} mP_i = (c_2 - c_1) + (c_3 - c_2) + \cdots + (c_{k+1} - c_k)$$
$$= b - a = mP.$$

(b) Với mỗi $k \in \mathbf{N}$, theo Bổ đề 1.2.4, $P \setminus \bigcup_{i=1}^{k} P_i = \bigcup_{j=1}^{r} C_j$ với các $C_j \in \mathcal{R}$ và rời nhau từng đôi. Do đó $P = (\bigcup_{i=1}^{k} P_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{r} C_j)$. Theo chứng minh trên thì

$$mP = \sum_{i=1}^{k} mP_i + \sum_{j=1}^{r} mC_j \geq \sum_{i=1}^{k} mP_i.$$

Vì k tùy ý nên từ đây ta suy ra được điều phải chứng minh.

(c) Để ý rằng nếu đặt $B_i := P \cap P_i \in \mathcal{R}$ thì $P = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$. Lại đặt $D_1 = B_1$ và $D_i := B_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j$ thì thì các B_i rời nhau từng đôi và $P = \bigcup_{j=1}^{k} D_j$. Mặt khác, theo Bổ đề 1.2.4 thì với mỗi $j = 1, 2, ..., k$, $D_j = \bigcup_{l=1}^{l_j} E_{jl}$ trong đó các tập $E_{j,l}$ thuộc $\mathcal{R}$ và rời nhau từng đôi một. Dễ thấy rằng lúc này các D_{jl}, $j = 1, 2, ..., j, l = 1, 2, ..., l_j$ cũng rời nhau từng đôi một và ta có $P = \cup_{j,l} E_{jl}$. Theo chứng minh trên thì

$$mP = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{l_j} mE_{jl} = \sum_{j=1}^{k} mD_j \leq \sum_{j=1}^{k} mB_j \leq \sum_{j=1}^{k} mP_j$$

(để ý rằng $D_j \subset B_j \subset P_j$ nên $mD_j \leq mB_j \leq mP_j$).

MATH-EDUCARE

(d) Bây giờ giả sử $P, P_i \in \mathcal{R}$, $i \in \mathbf{N}$, $P_i \cap P_j = \emptyset$, nếu $i \neq j$ và $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$mP = \sum_{i=1}^{\infty} mP_i. \qquad (*)$$

Vì với mọi $n \in \mathbf{N}$, ta luôn có $\bigcup_{i=1}^{n} P_i \subset P$ nên theo nhận xét ở trên, $\sum_{i=1}^{n} mP_i \leq mP$. Do đó $\sum_{i=1}^{\infty} mP_i \leq mP$.

Ta còn chứng minh $\sum_{i=1}^{\infty} mP_i \geq mP$. Nếu tồn tại $k \in \mathbf{N}$ mà $mP_k = +\infty$ thì bất đẳng thức trên đúng. Do đó ta có thể giả sử $mP_i < +\infty$ với mọi $i \in \mathbf{N}$. Hai trường hợp có thể xảy ra:

(α) $mP < +\infty$ (tức P là một gian bị chặn). Với $\epsilon > 0$ tùy ý, chọn đoạn đóng $P' \subset P$ sao cho $mP < mP' + \frac{\epsilon}{2}$ và với mỗi $i \in \mathbf{N}$, chọn khoảng mở P_i' sao cho $P_i' \supset P_i$ và

$$mP_i' < mP_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}}.$$

Các khoảng mở $(P_i')_{i \in \mathbf{N}}$ lập thành một phủ mở của tập compact P' nên phải có hữu hạn khoảng mở $P_{i_1}', \cdots, P_{i_k}'$ còn phủ P'. Khi đó theo nhận xét ở trên ta có

$$mP' \leq \sum_{j=1}^{k} mP_{i_j}' \leq \sum_{i=1}^{\infty} mP_i'.$$

Vậy

$$mP \leq mP' + \frac{\epsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} mP_i' + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} mP_i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} + \frac{\epsilon}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} mP_i + \epsilon.$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

Vì $\epsilon > 0$ tùy ý nên $mP \leq \sum_{i=1}^{\infty} mP_i$ và trường hợp này (*) được chứng minh.

(β) $mP = +\infty$. Với mỗi số $N > 0$ tùy ý, chọn gian đóng (bị chặn) $P' \subset P$ sao cho $mP' > N$. Chọn các gian mở $P_i' \supset P_i$ như ở (α), ta được $mP' \leq \sum_{i=1}^{\infty} mP_i'$ và

$$N < mP' < \sum_{i=1}^{\infty} mP_i + \frac{\epsilon}{2}.$$

Vì N, ϵ tùy ý nên ta được $\sum_{i=1}^{\infty} mP_i = +\infty = mP$, chính là (*) □

4.5. Đặt

$$\alpha = \inf\{\mu(G) \mid G \text{ mở}, \ G \supset E\},$$
$$\beta = \sup\{\mu(F) \mid F \text{ đóng}, \ F \subset E\} \text{ và}$$
$$\gamma = \sup\{\mu(K) \mid K \text{ compact}, \ K \subset E\}.$$

Ta có $\gamma \leq \beta \leq m^*(E) \leq \alpha$.

(a) Giả sử $\epsilon > 0$. Theo Định lí 4.1.7, tồn tại tập mở $G \supset E$ sao cho $m^*(G \setminus E) < \epsilon$. Do đó

$$m^*(G) = m^*(E \cup (G \setminus E)) \leq m^*(E) + m^*(G \setminus E)$$
$$\leq m^*(E) + \epsilon.$$

Như vậy, $\alpha \leq m^*(E) + \epsilon$. Vì $\epsilon > 0$ là tuỳ ý, ta có $\alpha \leq m^*(E)$.

(b) Câu (b) được chứng minh tương tự như câu (a). Xin độc giả tự kiểm chứng chi tiết.

(c) Giả sử $\epsilon > 0$. Theo câu (b), tồn tại tập đóng $F \subset E$ sao cho $\mu(E) \leq \mu(F) + \epsilon$. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, gọi

$$I_n = [-n, n] \times \cdots \times [-n, n] \subset \mathbf{R}^k \text{ và } K_n = I_n \cap F.$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

Thế thì K_n là tập compact, $K_n \subset K_{n+1} \subset F$ với mọi $n \in \mathbf{N}$ và đồng thời $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Do vậy

$$\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n) \leq \gamma$$

và ta có $\mu(E) \leq \gamma + \epsilon$. Vì $\epsilon > 0$ là bất kì nên ta được $\mu(E) \leq \gamma$ □

4.6.

(a) Giả sử $x, y \in [a, b]$, $x < y$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \mu(A \cap [a, y]) - \mu(A \cap [a, x]) \\ &\leq \mu[(A \cap [a, y]) \setminus (A \cap [a, x])] \\ &= \mu(A \cap [x, y]) \leq |x - y|. \end{aligned}$$

Do đó f liên tục trên $[a, b]$.

(b) Nếu A là tập bị chặn thì tồn tại đoạn $[a, b]$ để $A \subset [a, b]$. Với hàm số f xác định ở câu (a), ta thấy $f(a) = 0$ và $f(b) = \mu(A) = p > 0$. Do f là hàm số liên tục nên có $x_0 \in [a, b]$ sao cho $f(x_0) = q$. Đặt $B = A \cap [a, x_0]$ thì B là tập cần tìm.

Trường hợp A là tập không bị chặn thì ta biểu diễn

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap [-n, n]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

trong đó $A_n := A \cap [-n, n]$. Rõ ràng $A_n \subset A_{n+1}$ và do A đo được (L) nên A_n đo được (L) với mọi $n \in \mathbf{N}$. Vậy

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) = p > q.$$

Điều này kéo theo tồn tại $n \in \mathbf{N}$ sao cho $\mu(A_n) > q$. Do A_n bị chặn nên theo chứng minh trên, tồn tại tập B đo được (L) mà $B \subset A_n \subset A$ và $\mu(B) = q$. □

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

4.7.

Giả sử $A \subset \mathbf{R}$ và a, b là các số thực. Trước hết, ta có nhận xét

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n \Longleftrightarrow A + b \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Delta_n + b).$$

Nếu Δ_n là một gian của $\mathbf{R}$ thì

$$m^*(\Delta_n + b) = m^*(\Delta_n) = |\Delta_n|.$$

Do đó $m^*(A + b) \leq m^*(A)$. Từ đây ta lại có

$$m^*(A) = m^*[(A + b) - b] \leq m^*(A + b).$$

nghĩa là $m^*(A + b) = m^*(A)$. Hơn nữa, các bất đẳng thức

$$E \cap (A + b) = b + (E - b) \cap A \quad \text{và}$$
$$E \cap (A + b)^c = b + (E - b) \cap A^c$$

cho

$$m^*(E \cap (A + b)) + m^*(E \cap (A + b)^c) =$$
$$m^*((E - b) \cap A) + m^*((E - b) \cap A) + m^*((E - b) \cap A^c).$$

Do vậy, nếu A đo được (L) thì $A + b$ cũng đo được (L).

Tương tự,

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n \Longleftrightarrow aA \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} (a\Delta_n) \quad \text{nếu} \quad a \neq 0.$$

Lưu ý là $m^*(a\Delta_n) = |a| m^*(\Delta_n)$ với mọi gian Δ_n, ta suy ra $m^*(aA) = |a| m^*(A)$. Khi $a \neq 0$, các đẳng thức

$$E \cap aA = a((a^{-1}E) \cap A) \quad \text{và} \quad E \cap (aA)^c = a((a^{-1}E) \cap A^c)$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

4.7.

Giả sử $A \subset \mathbf{R}$ và a, b là các số thực. Trước hết, ta có nhận xét

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n \Longleftrightarrow A + b \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Delta_n + b).$$

Nếu Δ_n là một gian của $\mathbf{R}$ thì

$$m^*(\Delta_n + b) = m^*(\Delta_n) = |\Delta_n|.$$

Do đó $m^*(A + b) \leq m^*(A)$. Từ đây ta lại có

$$m^*(A) = m^*[(A + b) - b] \leq m^*(A + b).$$

nghĩa là $m^*(A + b) = m^*(A)$. Hơn nữa, các bất đẳng thức

$$E \cap (A + b) = b + (E - b) \cap A \quad \text{và}$$
$$E \cap (A + b)^c = b + (E - b) \cap A^c$$

cho

$$m^*(E \cap (A + b)) + m^*(E \cap (A + b)^c) =$$
$$m^*((E - b) \cap A) + m^*((E - b) \cap A) + m^*((E - b) \cap A^c).$$

Do vậy, nếu A đo được (L) thì $A + b$ cũng đo được (L).

Tương tự,

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n \Longleftrightarrow aA \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} (a\Delta_n) \quad \text{nếu} \quad a \neq 0.$$

Lưu ý là $m^*(a\Delta_n) = |a| m^*(\Delta_n)$ với mọi gian Δ_n, ta suy ra $m^*(aA) = |a| m^*(A)$. Khi $a \neq 0$, các đẳng thức

$$E \cap aA = a((a^{-1}E) \cap A) \quad \text{và} \quad E \cap (aA)^c = a((a^{-1}E) \cap A^c)$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

5.12. Hướng dẫn. Không mất tổng quát ta có thể giả thiết tất cả các hàm f_n hữu hạn trên A. Với $\alpha \in \mathbf{R}$, gọi

$$A_{n,\alpha} := \{x \in A \mid |f_n(x)| \geq \alpha\} \quad \text{và}$$
$$B_{n,\alpha} := \{x \in A \mid \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \geq \alpha\}.$$

Giả sử $\epsilon \in (0,1)$. Gọi δ là số dương sao cho $\delta/(1+\delta) = \epsilon$. Khi đó $B_{n,\epsilon} \subset A_{n,\delta}$ (chú ý rằng hàm số

$$\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbf{R},\ \varphi(x) = \frac{x}{1+x}$$

đơn điệu tăng).

5.13. Độc giả tự giải.

5.14.

Giả sử ngược lại rằng $(f_n g_n)_n$ không hội tụ theo độ đo về fg. Khi đó tồn tại các số dương ϵ, δ và dãy con $(f_{n_k} g_{n_k})_k$ của dãy $(f_n g_n)_n$ sao cho

$$\mu(\{x \in A \mid |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \geq \epsilon\}) \geq \delta \qquad (*)$$

với mọi $n \in \mathbf{N}$. Vì $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$ và $g_{n_k} \xrightarrow{\mu} g$ nên có dãy con $(f_{n_{k_p}} g_{n_{k_p}})_p$ của dãy $(f_{n_k} g_{n_k})_k$ hội tụ h.k.n. về fg trên A. Điều này mâu thuẫn với $(*)$ □

5.15. Từ bất đẳng thức

$$|f_n(x)+g_n(x)-(f(x)+g(x))| \leq |f_n(x)-f(x)|+|g_n(x)-g(x)|$$

ta được, với mỗi $\epsilon > 0$,

$$\{x \in A \mid |f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \geq \epsilon\} \subset$$
$$\{x \in A \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{x \in A \mid |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}.$$

Từ đó ta suy ra $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$.

Tương tự, nếu $\alpha \neq 0$ thì

$$\{x \in A \mid |\alpha f_n(x) - \alpha f(x)| \geq \epsilon\} = \{x \in A \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{|\alpha|}\}.$$

Từ đây ta suy ra $\alpha f_n \xrightarrow{\mu} \alpha f$. Phần còn lại xin độc giả tự chứng minh □

5.16. Hướng dẫn.

$$|f_n^+ - f^+| \leq |f_n - f|. \ |f_n^- - f^-| \leq |f_n - f| \text{ và}$$

$$|f_n| - |f| \,| \leq |f_n - f|.$$

5.17. Độc giả tự giải.

Bài tập ôn.

O1. Độc giả tự giải.

O2. Độc giả tự giải.

O3. Độc giả tự giải.

O4. Hướng dẫn. Xem Bài tập 1.2.

O5. Hướng dẫn. Xem Bài tập O4.

O6. Hướng dẫn. Đặt $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ thì

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(E_k).$$

O7.

(a) Rõ ràng là $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$. Nếu $Z \in \mathcal{A}'$ thì có $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ sao cho $A_1 \subset Z \subset A_2$. Do đó

$$A_1^c, \ A_2^c \in \mathcal{A}, \ A_1^c \setminus A_2^c = A_2 \setminus A_1 \text{ và } A_2^c \subset Z^c \subset A_1^c.$$

MATH-EDUCARE

Vậy, theo định nghĩa của $\mathcal{A}'$, $Z^c \in \mathcal{A}'$.

Giả sử $Z_n \in \mathcal{A}', n \in \mathbf{N}$. Khi đó với mỗi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại $A_{n,1}, A_{n,2} \in \mathcal{A}$ sao cho $A_{n,1} \subset Z_n \subset A_{n,2}$ và $\mu(A_{n,2} \setminus A_{n,1}) = 0$. Đặt

$$Z := \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n, \quad A_1 := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,1} \in \mathcal{A} \text{ và } A_2 := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,2} \in \mathcal{A}.$$

Dễ thấy rằng

$$A_1 \subset Z \subset A_2 \text{ và } A_2 \setminus A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{n,2} \setminus A_{n,1}).$$

Từ đây, $\mu(A_2 \setminus A_1) = 0$ và do đó, $Z \in \mathcal{A}'$. Vậy $\mathcal{A}'$ là một σ-đại số.

(b) μ' định nghĩa như trên độc lập với cách chọn các tập $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ (thỏa mãn $A_1 \subset Z \subset A_2$, $\mu(A_2 \setminus A_1) = 0$). Thật vậy, giả sử

$$\bar{A}_1 \subset Z \subset \bar{A}_2, \ \bar{A}_1, \bar{A}_2 \in \mathcal{A}, \ \mu(\bar{A}_2 \setminus \bar{A}_1) = 0.$$

Khi đó $\bar{A}_2 \supset Z \supset A_1$ và như thế, $\mu\bar{A}_2 \geq \mu A_1 = \mu A_2$. Tương tự như vậy ta cũng có $\mu A_2 \geq \mu\bar{A}_2$. Vậy $\mu A_2 = \mu\bar{A}_2$.

Rõ ràng μ' không âm và $\mu'(\emptyset) = 0$.

Nếu $(Z_n)_n$ là một dãy các tập rời nhau của $\mathcal{A}'$ thì khi đó sẽ tồn tại tương ứng dãy các tập $A_{n,1}, A_{n,2}, A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbf{N}$ thoả mãn các điều kiện như trong câu (a). Vì các tập Z_n, $n \in \mathbf{N}$ rời nhau từng đôi nên các tập $A_{n,1}$, $n \in \mathbf{N}$ cũng rời nhau từng đôi và do đó,

$$\mu'\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\right) = \mu(A_1) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n,1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu' Z_n.$$

Vậy μ' là một độ đo trên $\mathcal{A}'$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

(c) Rõ ràng μ' là một mở rộng của μ lên $\mathcal{A}'$.

Lấy $Z \in \mathcal{A}'$ với $\mu' Z = 0$. Từ định nghĩa ta suy ra tồn tại $A_2 \in \mathcal{A}$, $Z \subset A_2$ và $\mu A_2 = 0$. Giả sử rằng $Z' \subset Z$. Khi đó

$$\emptyset \subset Z' \subset A_2,\ \emptyset, A_2 \in \mathcal{A} \text{ và } \mu(A_2 \setminus \emptyset) = 0.$$

Do đó $Z' \in \mathcal{A}'$. Vậy μ' là độ đo đủ.

(d) Độc giả tự giải. □

O8. Hướng dẫn. (a) Đây là trường hợp riêng của Bài 2.12 với

$$f\colon \mathbf{N} \to [0, \infty],\ f(n) \equiv 1.$$

O9. Hướng dẫn. Với mỗi $x \in X$, ta có

$$x = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x, \frac{1}{n})$$

là tập đo được và vì vậy, theo giả thiết, $\{x\}$ là tập mở. Vậy họ các tập mở của X là $\mathcal{P}(X)$, tức mọi tập con của X đều là tập mở.

O10. Hướng dẫn. (i) Để ý rằng

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{n=2}^{\infty} A_n \subset \cdots \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \subset \cdots$$

và $\mu(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n) \leq \mu A_k$ với mọi $k \in \mathbf{N}$.

O11.

Theo Bài 3.4, ta chỉ việc chứng tỏ rằng với mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại một tập μ^*-đo được $F \subset A$ sao cho $\mu^*(A \setminus F) < \epsilon$. Giả sử $\epsilon > 0$. Với mỗi số tự nhiên n, theo giả thiết, tồn tại tập μ^*-đo được E_n sao cho $\mu^*(A \Delta E_n) < \epsilon \cdot 2^{-n}$. Đặt $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ thì E là μ^*-đo được. Do

$$E \setminus A \subset E_n \setminus A \subset A \Delta E_n$$

nên

$$\mu^*(E \setminus A) \le \mu^*(A \Delta E_n) < \epsilon \cdot 2^{-n} \text{ với mọi } n \in \mathbf{N}.$$

Nghĩa là $\mu^*(E \setminus A) = 0$ hay $E \setminus A$ là μ^*-đo được. Điều này kéo theo tập hợp

$$F := E \cap A = E \setminus (E \setminus A)$$

là μ^*-đo được. Cuối cùng,

$$A \setminus F \subset A \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \Delta E_n)$$

nên

$$\mu^*(A \setminus F) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \Delta E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \quad \square$$

O12.

Đặt $E_n^c := [0,1] \setminus E_n$ thì

$$\mu(E_n^c) = 1 - \mu(E_n) \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó tồn tại dãy con $(E_{n_k}^c)_k \subset (E_n)_n$ sao cho

$$\mu(E_{n_k}^c) < \frac{1-\alpha}{2^k} \quad \text{với mọi} \quad k \in \mathbf{N}.$$

Vậy

$$\mu \circ n = 1_\infty(E_{n_k}) = \mu([0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}^c) = 1 - \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}^c)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n_k}^c) > 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{2^k} = \alpha \quad \square$$

MATH-EDUCARE

O13. Từ điều kiện của bài tøán ta thấy rằng a_0 nếu tồn tại là duy nhất.

Với mỗi $t \in \mathbf{R}$, đặt

$$A_t := \{x \in [0,1] \mid f(x) \geq t\} \text{ và } \varphi(t) := \mu(A_t).$$

Thế thì $A_t \subset A_s$ khi $s \leq t$ nên φ là hàm đơn điệu giảm trên $\mathbf{R}$. Hơn nữa, $0 \leq \varphi \leq 1$. Chú ý rằng f là hàm số hữu hạn, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Do đó có số tự nhiên k để $\varphi(k) < 1/2$. Bây giờ ta đặt

$$E := \{t \in \mathbf{R} \mid \varphi(t) \geq \frac{1}{2}\}.$$

φ là hàm đơn điệu giảm nên $t \leq k$ với mọi $t \in E$, tức là E bị chặn trên. Đồng thời, nếu $t \in E$ và $s < t$ thì $s \in E$. Gọi $a_0 := \sup E$, ta có $a_0 \in \mathbf{R}$. Nếu $a > a_0$ thì $a \notin E$ nên $\varphi(a) < 1/2$. Mặt khác,

$$A_{a_0} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in [0,1] \mid f(x) \geq a_0 - \frac{1}{n}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{a_0 - \frac{1}{n}}$$

và lưu ý $a_0 - 1/n \in E$, ta suy ra

$$\mu(a_{a_0}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{a_0 - \frac{1}{n}}) = \lim_{n\to\infty} \varphi(a_0 - \frac{1}{n}) \geq \frac{1}{2}.$$

Vậy số a_0 thỏa mãn các điều kiện đề ra □

O14. Theo Bài tập 4.5, tồn tại tập K compact, $K \subset A$ và tồn tại tập mở $U \supset K$ với

$$\mu(U) < 2\mu(K). \qquad (*)$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

Đặt $\delta = d(K, \mathbb{R} \setminus U)$ thì $\delta > 0$ (xem Bài tập 4.8, Chương 1). Hơn nữa, $t + K \subset U$ khi $|t| < \delta$. Ta phải có

$$(t + K) \cap K \neq \emptyset \text{ khi } |t| < \delta. \qquad (**)$$

Thật vậy, nếu ngược lại thì Bài tập 4.7 cho

$$2\mu(K) = \mu(t + K) + \mu(K) = \mu((t + K) \cup K) \leq \mu(U),$$

mâu thuẫn với (*). Theo (**), nếu $|t| < \delta$ thì tồn tại $x, y \in K$ sao cho $t + x = y$ và do đó, $t = y - x \in (K - K) \subset (A - A)$. Vậy $(-\delta, \delta) \subset (A - A)$ □

O15. Độc giả tự giải.

O16. Độc giả tự giải.

O17. Hướng dẫn.

Tồn tại dãy con (g_n) của dãy (f_n) thỏa mãn điều kiện

$$\mu\Big(\{x \in A \mid |g_n(x) - g_m(x)| \geq 2^{-n}\}\Big) < 2^{-n}$$

với mọi $m \geq n$. Đặt

$$E_n := \{x \in A \mid |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \geq 2^{-n}\}.$$

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \text{ và } F := \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Khi đó $\mu(F) = 0$ và với mỗi điểm cố định $x \notin F$, tồn tại số tự nhiên k_x sao cho $x \notin F_n$ khi $n \geq k_x$. Từ đó, nếu $n \geq k_x$ thì

$$|g_{n+p}(x) - g_n(x)| \leq \sum_{i=n}^{\infty} |g_{i+1}(x) - g_i(x)| \leq \frac{1}{2^{n-i}}.$$

Điều này có nghĩa $(g_n(x))$ là dãy cơ bản các số thực với mọi $x \notin F$.

O18.

Vì $(a, +\infty) \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ với mọi $a \in \mathbf{R}$ nên từ (i) và (ii) ta suy ra

$$\begin{aligned} A[\ f(x) > a] &= f^{-1}((a, +\infty]) \\ &= f^{-1}((a, +\infty)) \cup f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

và f là $\mathcal{A}$-đo được.

Ngược lại, giả sử f là $\mathcal{A}$-đo được. Khi đó,

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A[\ f(x) \leq -n] \in \mathcal{A},$$

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A[\ f(x) \geq n] \in \mathcal{A}.$$

Vậy ta có (i). Để chứng minh (ii), ta đặt $\mathcal{S} := \{S \subset \mathbf{R} \mid f^{-1}(S) \in \mathcal{A}\}$ và chứng minh rằng $\mathcal{S}$ là một σ-đại số chứa mọi tập mở trong $\mathbf{R}$ và do đó chứa cả $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

Rõ ràng rằng $\emptyset \in \mathcal{S}$ và nếu $S \in \mathcal{S}$ thì

$$f^{-1}(\mathbf{R} \setminus S) = A \setminus [\ f^{-1}(S) \cup f^{-1}(\{+\infty\}) \cup f^{-1}(\{-\infty\})] \in \mathcal{A}.$$

Vậy $\mathcal{S}$ đóng kín đối với phép lấy phần bù. Ngoài ra, nếu $(S_n)_n \subset \mathcal{S}$ thì $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(S_n) \in \mathcal{A}$. Vậy $\mathcal{S}$ là một σ-đại số. Bây giờ nếu (a, b), $a \leq b$ là một khoảng mở trong $\mathbf{R}$ thì

$$\begin{aligned} f^{-1}((a, b)) &= f^{-1}([-\infty, b) \cap f^{-1}((a, +\infty]) \\ &= A[\ f(x) < b] \cap A[\ f(x) > a] \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Do đó $(a, b) \in \mathcal{S}$. Do định lí cấu trúc tập mở trong $\mathbf{R}$, mọi tập mở trong $\mathbf{R}$ đều là hợp một số đếm được các khoảng mở

rời nhau nên $\mathcal{S}$ chứa họ tất cả các tập mở trong $\mathbf{R}$ và do đó chứa cả σ-đại số Borel $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ □

O19. Hướng dẫn. Xét dãy hàm $(g_n)_n$ xác định bởi

$$g_n(x) = n\,[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)], \quad n \in \mathbf{N}.$$

O20.

Với mỗi $a \in \mathbf{R}$, ta có

$$\begin{aligned}(\phi \circ f)^{-1}([a,+\infty]) &= f^{-1}(\phi^{-1}([a,+\infty])) \\ &= f^{-1}((\phi^{-1}([a,+\infty]) \cap \mathbf{R}) \cup A_+ \cup A_-) \\ &= f^{-1}(\phi^{-1}([a,+\infty]) \cap \mathbf{R}) \cup f^{-1}(A_+) \cup f^{-1}(A_-),\end{aligned}$$

ở đây $A_+ := \{+\infty\} \cap \phi^{-1}([a,+\infty])$ và $A_- := \{-\infty\} \cap \phi^{-1}([a,+\infty])$. Dễ thấy rằng $f^{-1}(A_+)$ và $f^{-1}(A_-)$ thuộc $\mathcal{A}$. Ngoài ra, vì $\phi^{-1}([a,+\infty]) \cap \mathbf{R} \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ (giả thiết) và f là $\mathcal{A}$ - đo được nên $f^{-1}(\phi^{-1}([a,+\infty]) \cap \mathbf{R}) \in \mathcal{A}$ theo Bài tập O18. Do vậy với mọi $a \in \mathbf{R}$, $A[\,\phi \circ f(x) \geq a] = (\phi \circ f)^{-1}([a,+\infty]) \in \mathcal{A}$ và nghĩa là $\phi \circ f$ là $\mathcal{A}$-đo được □

O21. Hướng dẫn. Xem bài 5.3

O22. Hướng dẫn. Trước hết hãy chứng tỏ rằng nếu I là một khoảng mở bị chặn thì $\mu(f(I)) \leq C.\mu I$.

O23. Hướng dẫn.

(a) Cố định $x \in \mathbf{R}$, xét lần lượt các trường hợp $r = 0$, $r \in \mathbf{N}$, $r \in \mathbb{Z}$ và $r \in \mathbf{Q}$.

(b) Không mất tính tổng quát, có thể giả sử f bị chặn trên một khoảng $(-\epsilon, \epsilon)$ nào đó.

(c) Sử dụng câu (a).

(e) Hãy chứng tỏ rằng tồn tại một số $n \in \mathbf{N}$ sao cho $E = f^{-1}([-n,n])$ có độ đo dương. Sau đó áp dụng Bài tập O14 và Câu (b).

MATH-EDUCARE

O24. Hướng dẫn. Gọi (x_n) là dãy điểm của X sao cho $\overline{\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}} = X$. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, gọi $B_{n,i}$ là hình cầu mở tâm x_i, bán kính $1/n$. Lúc đó dãy $(B_{n,i})_{i\in\mathbf{N}}$ phủ X với mỗi $n \in \mathbf{N}$. Tồn tại số tự nhiên m_n sao cho

$$\mu\Big(X \setminus \bigcup_{n}^{m_n} B_{n,i}\Big) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

Gọi $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{m_n} \overline{B}_{n,i}$ thì K là tập đóng và hoàn toàn giới nội.

O25. Hướng dẫn. Tồn tại dãy đơn điệu tăng ngặt $(t_n) \subset T$ sao cho $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$. Hãy chứng minh $\bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{t_n}$. Sau đó chứng tỏ hàm $\varphi(t) := \mu(A_t)$ đơn điệu tăng trên T.

O26. Độc giả tự giải.

O27. Độc giả tự giải.

O28. Hướng dẫn. Gọi

$$\varphi, \psi\colon A \to \mathbf{R},\ \varphi(x) \equiv a,\ \psi(x) \equiv b.$$

Khi đó φ và ψ là những hàm đo được trên A. Vì $g := \max\{\varphi, f\}$ đo được và $f|_a^b = \max\{g, \psi\}$ nên $f|_a^b$ đo được.

O29. Độc giả tự giải.

O30. Hướng dẫn. Giả sử $(1/f_n)_n$ không hội tụ theo độ đo về $1/f$ trên A. Khi đó tồn tại các số dương ϵ, δ và dãy con $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ sao cho

$$\mu\Big(\{x \in A : \Big|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\Big| \geq \epsilon\}\Big) \geq \delta.$$

Do $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$ nên có dãy con $(f_{n_{k_p}})_p \subset (f_{n_k})_k$ hội tụ về f h. k. n., tức là $1/f_{n_{k_p}} \to 1/f$ h. k. n. Do $\mu(A) < \infty$, $1/f_{n_{k_p}} \xrightarrow{\mu} 1/f$, mâu thuẫn.

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

O31. Hướng dẫn. Giả sử ngược lại tồn tại $x_0 \in I$ sao cho f liên tục tại x_0 và $f_n(x_0)$ không hội tụ về $f(x_0)$. Khi đó tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho với mỗi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại $m_n > n$ để $|f_{m_n}(x_0) - f(x_0)| \geq \epsilon$. Vì f liên tục tại x_0 nên có khoảng mở $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ mà

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ với mọi } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Gọi $I_{m_n} := \{x \in I : |f_{m_n}(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$. Do f_{m_n} đơn điệu, ta luôn có $[x_0, x_0 + \delta) \subset I_{m_n}$ hoặc $(x_0 - \delta, x_0] \subset I_{m_n}$, nên $\mu(I_{m_n}) \geq \delta$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên I.

O32.

(a) Việc kiểm chứng xin dành cho bạn đọc.

(b) Các tính chất phản xạ và đối xứng là rõ ràng. Bây giờ giả sử $A \sim B$ và $B \sim C$. Lưu ý là $(A\Delta C) \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$, ta có

$$\mu(A\Delta C) \leq \mu(A\Delta B) + \mu(B\Delta C) = 0. \qquad (*)$$

Do đó $A \sim C$. Vậy $\sim$ là một quan hệ tương đương trên $\mathcal{A}$.

(c) Trước hết, ta chứng tỏ $d(\bar{A}, \bar{B})$ không phụ thuộc vào phần tử đại diện. Thật vậy, giả sử $A_1 \in \bar{A}$ và $B_1 \in \bar{B}$. Khi đó $(A\Delta B) \subset (A\Delta A_1) \cup (A_1\Delta B_1) \cup (B_1\Delta B)$ nên

$$\begin{aligned}\mu(A\Delta B) &\leq \mu(A\Delta A_1) + \mu(A_1\Delta B_1) + \mu(B_1\Delta B) \\ &= \mu(A_1\Delta B_1).\end{aligned}$$

Tương tự, $\mu(A_1\Delta B_1) \leq \mu(A\Delta B)$. Vậy

$$\mu(A_1\Delta B_1) = \mu(A\Delta B)$$

và $d(\bar{A}, \bar{B})$ không phụ thuộc vào phần tử đại diện.

Giả sử $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \in D$. $(*)$ cho bất đẳng thức tam giác $d(\bar{A}, \bar{C}) \leq d(\bar{A}, \bar{B}) + d(\bar{B}, \bar{C})$. Các tiên đề còn lại xin bạn đọc

WWW.MATHEDUCARE.COM

tự kiểm tra. Bây giờ ta chứng minh (D, d) là một không gian đủ. Giả sử $(\bar{A}_n)_n$ là một dãy cơ bản trong D. Khi đó tồn tại một dãy con $(\bar{A}_{n_k})_k \subset (\bar{A}_n)_n$ sao cho

$$\mu(A_{n_{k+1}} \Delta A_{n_k}) = d(\bar{A}_{n_{k+1}}, \bar{A}_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Đặt $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\bigcup_{i=k}^{\infty} A_{n_i})$ thì $A \in \mathcal{M}$. Bây giờ ta cố định k. Với lưu ý $A \subset \bigcup_{i=k}^{\infty} A_{n_i} = A_{n_k} \cup [\bigcup_{i=k}^{\infty} (A_{n_{i+1}} \setminus A_{n_i})]$, ta có

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \mu(A_{n_k}) + \sum_{i=k}^{\infty} \mu(A_{n_{i+1}} \setminus A_{n_i}) \\ &\leq \mu(A_{n_k}) + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \mu(A_{n_k}) + \frac{1}{2^k} < \infty. \end{aligned}$$

Do đó $\bar{A} \in D$. Hơn nữa,

$$\begin{aligned} \mu(A \setminus A_{n_k}) &\leq \mu[\bigcup_{i=k}^{\infty} (A_{n_{i+1}} \setminus A_{n_i})] \\ &\leq \sum_{i=k}^{\infty} \mu(A_{n_{i+1}} \setminus A_{n_i}) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Mặt khác, nếu $x \in A_{n_k} \setminus A$ thì $x \in A_{n_k}$ và $x \notin A = \bigcap_{m=1}^{\infty} (\bigcup_{i=m}^{\infty} A_{n_i})$. Do đó tồn tại số tự nhiên $m > k$ để $x \notin A_{n_i}$ với mỗi $i \geq m$. Ta suy ra $x \in \bigcup_{i=k}^{\infty} (A_{n_i} \setminus A_{n_{i+1}})$ và vì vậy, $A_{n_k} \setminus A \subset \bigcup_{i=k}^{\infty} (A_{n_i} \setminus A_{n_{i+1}})$. Từ đây ta có

$$\mu(A_{n_k} \setminus A) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \mu(A_{n_{i+1}} \setminus A_{n_i}) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^k}.$$

Vậy

$$d(\bar{A}_{n_k}, \bar{A}) = \mu(A_{n_k} \Delta A)$$
$$= \mu(A \setminus A_{n_k}) + \mu(A_{n_k} \setminus A) \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Vì điều này đúng với $k \in \mathbf{N}$ bất kì nên ta suy ra $d(\bar{A}_{n_k}, \bar{A}) \to 0$ khi $k \to \infty$. Vậy $d(\bar{A}_n, \bar{A}) \to 0$ khi $n \to \infty$ và (D, d) là một không gian mê tric đầy đủ □

O33.

Điều kiện cần là rõ ràng, ta chỉ chứng minh điều kiện đủ. Giả sử $\mu_1 = \mu_2^*$ trên $\mathcal{S}_1$ và $\mu_2 = \mu_1^*$ trên $\mathcal{S}_2$. Xét tập $A \subset X$ bất kì. Giả sử $(A_n) \subset \mathcal{S}_1$ và $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Theo tính chất σ–nửa cộng tính của độ đo ngoài ta có $\mu_2^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2^*(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n)$ nên $\mu_2^*(A) \leq \mu_1^*(A)$. Hoàn toàn tương tự, $\mu_1^*(A) \leq \mu_2^*(A)$ và do đó, $\mu_1^*(A) = \mu_2^*(A)$. Vì $A \subset X$ là bất kì, ta được $\mu_1^* = \mu_2^*$ □

O34.

Gọi ν^* là độ đo ngoài sinh bởi (X, Σ, ν) và $\bar{\nu}$ là thác triển tiêu chuẩn của ν lên σ-đại số các tập ν^*-đo được $\bar{\Sigma}$. Để ý rằng vì $\mathcal{S} \subset \Sigma$ nên $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}(\Sigma)$ ($\mathcal{F}(\mathcal{S})$, $\mathcal{F}(\Sigma)$ là các σ-đại số sinh bởi $\mathcal{S}$ và Σ tương ứng) và do đó $\mu = \bar{\nu}$ trên $\mathcal{F}(\mathcal{S})$.

Giả sử $A \subset X$ và $(A_n)_n \subset \mathcal{S}$ sao cho $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Vì m và ν trùng nhau trên $\mathcal{S}$ nên,

$$\nu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Điều này chứng tỏ rằng $\nu^*(A) \leq m^*(A)$ với mọi $A \subset X$ (thực ra điều này có thể thấy ngay từ định nghĩa của độ đo ngoài và $\mathcal{S} \subset \Sigma$).

MATH-EDUCARE

Bây giờ giả sử $A \in \Sigma$ và $m^*(A) = \mu A < +\infty$. Ta sẽ chứng minh rằng $m^*(A) \leq \nu(A)$. Lấy tùy ý $\epsilon > 0$. Theo định nghĩa của m^*, tồn tại $(A_n)_n \subset \mathcal{S}$ sao cho $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < m^*(A) + \epsilon$. Đặt $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Khi đó $B \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ và $m^*(B) < m^*(A) + \epsilon$ hay $\mu(B \setminus A) < \epsilon$. Để ý rằng (theo trên) $\nu^*(B \setminus A) \leq m^*(B \setminus A) = \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) < \epsilon$. Do đó,

$$m^*(A) = \mu A \leq \mu B = \bar{\nu}(B) = \bar{\nu}A + \bar{\nu}(B \setminus A) = \\ = \nu A + \mu(B \setminus A) < \nu A + \epsilon.$$

Vì $\epsilon > 0$ tùy ý nên ta được $m^* A \leq \nu A$.

Trong trường hợp $m^* A = +\infty$, vì m là σ - hữu hạn nên có họ $(X_n)_n \subset \mathcal{S}$ sao cho $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ và $m(A_n) < +\infty$ mọi $n \in \mathbf{N}$. Để ý rằng ta có thể chọn các X_n sao cho chúng rời nhau từng đôi (xin độc giả hãy tự chứng minh điều này). Bây giờ giả sử $A \in \Sigma$ (và $m^* A = +\infty$). Khi đó, theo trên thì $m^*(X_n \cap A) = \nu(X_n \cap A)$ với mọi $n \in \mathbf{N}$ và vì thế

$$m^* A = \mu A = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} [X_n \cap A]\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n \cap A)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(X_n \cap A) = \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} [X_n \cap A]\Big) = \nu A.$$

Phần còn lại là hệ quả trực tiếp của điều vừa chứng minh □

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

Chương 3

TÍCH PHÂN LEBESGUE

A. Tóm tắt lí thuyết

§1. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN LEBESGUE

1.1. Tích phân các hàm đơn giản không âm.

Ta sẽ kí hiệu $\mathcal{S}_A^+$ là tập tất cả các hàm đơn giản không âm (đo được) trên $A \in \mathcal{A}$. Giả sử $f \in \mathcal{S}_A^+$ thì f có thể được biểu diễn dưới dạng

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x), \quad x \in A, \tag{1.1}$$

trong đó các số $\alpha_i \geq 0$, các tập A_i đo được, rời nhau từng đôi một , $i = 1, 2, \ldots, n$ và $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.

1.1.1. Định nghĩa. *Tích phân* của hàm đơn giản không âm f trên A theo độ đo μ, kí hiệu là $\int_A f(x)d\mu(x)$ hay $\int_A f(x)d\mu$ hay gọn hơn $\int_A f d\mu$, là số $\sum_1^n \alpha_i \mu A_i$. Vậy

$$\int_A f(x)d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu A_i. \tag{1.2}$$

Rõ ràng rằng nếu $\mu A = 0$ thì $\int_A f d\mu = 0$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

1.1.2. Nhận xét. Nếu f có một biểu diễn khác, chẳng hạn,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}(x), \quad x \in A$$

($\beta_i \geq 0$, B_i đo được, rời nhau từng đôi một và $\bigcup_{j=1}^{m} B_j = A$) thì

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu A_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu B_j.$$

Như vậy Định nghĩa 1.1.1 là hợp lí.

Từ đây về sau, để cho gọn, nếu $(f_n)_n$ là một dãy đơn điệu không giảm (không tăng) các hàm trên A, nghĩa là $f_n \leq f_{n+1}$ trên A, $n \in \mathbf{N}$ ($f_n \geq f_{n+1}$ trên A) và hội tụ đến hàm g trên A thì ta sẽ viết $f_n \nearrow g$ ($f_n \searrow g$). Một số tính chất đơn giản khác của tích phân các hàm đơn giản không âm được cho trong mệnh đề sau.

1.1.3. Mệnh đề. *Với mọi $f, g \in \mathcal{S}_A^+$, $(f_n)_n$, $(g_n)_n \subset \mathcal{S}_A^+$, mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, các khẳng định sau là đúng:*

(i) $\int_A (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu$.

(ii) Nếu $A = B \cup C$ và $B \cap C = \emptyset$ thì

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu + \int_C f d\mu.$$

(iii) Nếu $f \leq g$ trên A thì $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$.

(iv) Nếu $f_n \nearrow g$ thì

$$\lim_{n \to \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A g d\mu.$$

MATH-EDUCARE

(v) Nếu $f_n \le f_{n+1}$ *và* $g_n \le g_{n+1}$ *mọi* $n \in \mathbf{N}$ *và* $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$ *thì tồn tại các giới hạn* $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$, $\lim_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu$ *và*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu. \tag{1.4}$$

1.2. Tích phân của hàm đo được không âm.

Cho $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là một hàm đo được và không âm trên A. Theo định lí về cấu trúc của hàm đo được, tồn tại một dãy các hàm đơn giản không âm $(f_n)_n$ trên A sao cho

$$0 \le f_n \le f_{n+1} \text{ mọi } n \in \mathbf{N} \text{ và } f_n \nearrow f,\ n \to \infty.$$

Giới hạn $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$ tồn tại và là một số thực không âm hay $+\infty$. Ta đi đến định nghĩa sau:

1.2.1. Định nghĩa. Ta định nghĩa *tích phân* của hàm đo được không âm f trên A theo độ đo μ, kí hiệu là $\int_A f d\mu$ hay $\int_A f(x) d\mu(x)$, là số $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$. Vậy

$$\int_A f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu.$$

Định nghĩa trên là hợp lí vì $\int_A f d\mu$ không phụ thuộc vào việc chọn các dãy hàm đơn giản không âm hội tụ đến f (Mệnh đề 1.1.3 (v)). Cũng để ý rằng tích phân của một hàm đo được $f \ge 0$ luôn tồn tại và thuộc $[0, \infty]$.

1.3. Tích phân của hàm đo được.

Bây giờ giả sử $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là hàm đo được bất kì. Khi đó, nếu đặt $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := -\min\{f, 0\}$ thì f^+ và f^- là những hàm đo được không âm trện A và $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. Theo Định nghĩa 1.2.1 các tích phân $\int_A f^+ d\mu$

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

và $\int_A f^- d\mu$ tồn tại và là các số thực không âm hay $+\infty$. Một cách tự nhiên ta đi đến định nghĩa sau:

1.3.1. Định nghĩa. Nếu một trong hai tích phân $\int_A f^+ d\mu$ và $\int_A f^- d\mu$ là hữu hạn thì ta định nghĩa *tích phân* của f trên A (theo độ đo μ), kí hiệu là $\int_A f d\mu$ hay $\int_A f(x) d\mu(x)$, là số

$$\int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu.$$

Vậy

$$\int_A f d\mu := \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu.$$

Để ý là nếu tích phân của f trên A tồn tại thì $\int_A f d\mu \in \overline{\mathbf{R}}$.

Nếu $\int_A f d\mu \in \mathbf{R}$ (nghĩa là $\int_A f d\mu$ tồn tại và hữu hạn) thì ta nói f *khả tích* trên A. Lúc này cả hai tích phân $\int_A f^+ d\mu$ và $\int_A f^- d\mu$ đều là những số hữu hạn.

Giả sử E là một tập con đo được của A. Khi đó tích phân của f trên E được định nghĩa là tích phân của hàm $f_{|E}$ trên E. Dễ thấy rằng

$$\int_E f d\mu := \int_E f_{|E} d\mu = \int_A f.\chi_E d\mu.$$

§2. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA TÍCH PHÂN.

Từ đây, ta quy ước rằng các tập đề cập đến đều là các tập đo được còn các hàm nói đến đều đo được (trên các tập xác định tương ứng) và nhận giá trị trong tập số thực mở rộng $\overline{\mathbf{R}}$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

2.1. Tính cộng tính.

2.1.1. Định lí. *Nếu* $A \cap B = \emptyset$ *thì*

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu \tag{2.1}$$

miễn là một trong hai vế của đẳng thức trên có nghĩa.

2.1.2. Hệ quả. *Nếu* $B \subset A$ *và tích phân* $\int_A f d\mu$ *tồn tại thì* $\int_B f d\mu$ *cũng tồn tại. Đặc biệt, nếu* f *khả tích trên* A *thì* f *cũng khả tích trên* B.

2.1.3. Hệ quả.

(i) Nếu $f \geq 0$ *trên* A *và* $B \subset A$ *thì* $\int_B f d\mu \leq \int_A f d\mu$.

(ii) Nếu $\mu B = 0$ *và* $\int_A f d\mu$ *tồn tại thì*

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_{A\setminus B} f d\mu = \int_A f d\mu.$$

(iii) Nếu $f \sim g$ *trên* A *thì* $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ *miễn là một trong hai tích phân trên tồn tại. Đặc biệt nếu* $f = 0$ *h.k.n. trên* A *thì* $\int_A f d\mu = 0$.

2.1.4. Nhận xét. Hệ quả 2.1.3 (cũng như Hệ quả 2.1.2 với $\mu(A \setminus B) = 0$) cho thấy rằng nếu ta thay đổi giá trị của một hàm có tích phân trên một tập có độ đo 0 thì vẫn không làm thay đổi tích phân của nó.

2.2. Tính bảo toàn thứ tự.

2.2.1. Định lí. *Nếu* $f \leq g$ *trên* A *và các tích phân* $\int_A f d\mu$, $\int_A g d\mu$ *tồn tại thì*

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu. \tag{2.5}$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

Dễ dàng nhận thấy rằng kết luận ở Định lí 2.2.2 cũng đúng nếu ta thay "$f \leq g$ trên A" bởi giả thiết "$f \leq g$ h.k.n trên A".

2.2.2. Hệ quả. *Nếu $\mu A < +\infty$ và f bị chặn cốt yếu trên A thì f khả tích trên A.*

2.2.3. Hệ quả. *Nếu f khả tích trên A thì f hữu hạn h.k.n. trên A.*

2.2.4. Hệ quả. *Nếu $f \geq 0$ trên A và $\int_A f d\mu = 0$ thì $f = 0$ h.k.n. trên A.*

2.3. Tính tuyến tính.

2.3.1. Định lí. *Các đẳng thức sau đây là đúng miễn là các vế phải có nghĩa:*

(i) $\int_A cf d\mu = c \int_A f d\mu, \quad (c \in \mathbb{R})$,

(ii) $\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$.

2.3.2. Nhận xét. Nếu ta kí hiệu $L^1(A, \mu)$ là tập hợp gồm tất cả những hàm khả tích trên A (trên tập này ta không phân biệt các hàm tương đương) thì theo Định lí 2.3.1, $L^1(A, \mu)$ là một không gian vectơ trên trường $\mathbf{R}$. Lúc này, cũng theo Định lí 2.3.1, hàm $I : L^1(A, \mu) \longrightarrow \mathbf{R}$ (thường cũng gọi là phiếm hàm tích phân) xác định bởi $I(f) := \int_A f(x) d\mu$, $f \in L^1(A, \mu)$ là một phiếm hàm tuyến tính trên $L^1(A, \mu)$. Điều này giải thích thuật ngữ "tính tuyến tính" sử dụng ở trên.

2.4. Tính khả tích.

2.4.1. Định lí. *Các khẳng định sau là đúng:*

(i) Nếu $\int_A f d\mu$ có nghĩa thì $|\int_A f d\mu| \leq \int_A |f| d\nu$.

(ii) f khả tích trên A khi và chỉ khi $|f|$ khả tích trên A.

(iii) Nếu $|f| \leq g$ h.k.n. trên A và g khả tích trên A thì f cũng khả tích trên A.

(iv) Nếu f, g khả tích trên A thì $f \pm g$ cũng khả tích trên A. Hơn nữa nếu f khả tích còn g bị chặn trên A thì $f.g$ khả tích trên A.

MATH-EDUCARE

§3. QUA GIỚI HẠN DƯỚI DẤU TÍCH PHÂN

Bây giờ chúng ta chuyển sang khảo sát một tính chất quan trọng thường gặp trong giải tích và lí thuyết xác suất. Đó là việc qua giới hạn dưới dấu tích phân Lebesgue. Đây là một trong những ưu điểm nổi bật của tích phân Lebesgue so với tích phân Riemann.

3.1. Qua giới hạn dưới dấu tích phân.

Cũng như trong mục trước, các hàm nói đến trong mục này đều đo được trên tập đo được A và nhận giá trị trong tập số thực mở rộng $\overline{\mathbf{R}}$.

3.1.1. Định lí. (Levi) *Nếu* $0 \leq f_n \nearrow f$ *trên* A *thì.* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$.

3.1.2. Định lí. (Levi) *Giả sử* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *là một dãy đơn điệu (tăng hay giảm) các hàm đo được trên* A *và tồn tại một số* $k_0 \in \mathbf{N}$ *sao cho* f_{k_0} *khả tích. Khi đó*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n d\mu. \tag{3.3}$$

3.1.3. Nhận xét.

(i) Thực ra trong trường hợp $(f_n)_n$ là dãy đơn điệu tăng thì chỉ cần $\int_A f_1^- d\mu < +\infty$ là đủ. Tương tự như vậy, nếu $(f_n)_n$ là dãy đơn điệu giảm thì chỉ cần giả thiết $\int_A f_1^+ d\mu < +\infty$ là đủ.

(ii) Để ý rằng Định lí 3.1.2 cũng đúng nếu $f_n \nearrow f$ và f khả tích trên A.

3.1.4. Hệ quả. *Nếu* $g_n \geq 0$ *trên* A, *mọi* $n \in \mathbf{N}$ *thì* $\int_A \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_A g_n d\mu$. *Nếu thêm* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_A g_n d\mu < +\infty$

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

thì $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) < +\infty$ *h.k.n. trên* A *và hàm số* $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ *khả tích trên* A.

3.1.5. Định lí. (Bổ đề Fatou) *Nếu* $f_n \geq 0$ *trên* A *với mọi* $n \in \mathbf{N}$ *thì*

$$\int_A \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\nu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu. \tag{3.4}$$

3.1.6. Nhận xét.

(i) Bất đẳng thức (3.4) còn đúng nếu $f_n \geq g$, $n \in \mathbf{N}$ và g khả tích trên A. Thật vậy, để thấy điều này chỉ cần áp dụng Bổ đề Fatou cho dãy $(f_n - g)_n$.

(ii) Nếu $f_n \leq g$ mọi $n \in \mathbf{N}$ và g khả tích thì

$$\int_A \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu. \tag{3.5}$$

Thật vậy, lúc này $-f_n \geq -g$ mọi $n \in \mathbf{N}$. Áp dụng Bổ đề Fatou (cùng với (i)) cho dãy $(-f_n)_n$ và để ý rằng với mọi dãy $(\alpha_n)_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} (-\alpha_n) = -\overline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n$.

Định lí sau đây là một trong những kết qủa quan trọng và sâu sắc nhất của lí thuyết tích phân Lebesgue:

3.1.7. Định lí. (Định lí hội tụ bị chặn Lebesgue) *Giả sử* $(f_n)_n$ *là dãy các hàm đo được trên* A *thoả mãn* $|f_n| \leq g$, *mọi* $n \in \mathbf{N}$ *và* g *là hàm khả tích trên* A. *Nếu* $(f_n)_n$ *hội tụ hầu khắp nơi hay hội tụ theo độ đo về một hàm* f *trên* A *thì*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu. \tag{3.6}$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

Hệ quả sau đây là đơn giản nhưng tỏ ra hữu ích trong nhiều trường hợp:

3.1.8. Hệ quả. *Giả sử* $\mu A < +\infty$, $|f_n| \leq K$ *mọi* $n \in \mathbf{N}$ *(*K *là một hằng số nào đó). Khi đó nếu* $(f_n)_n$ *hội tụ về* f *theo độ đo hay hầu khắp nơi trên* A *thì*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu \quad \square$$

3.2. Tính σ-cộng tính và tính liên tục tuyệt đối của tích phân.

Chúng ta vẫn làm việc với không gian độ đo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ và giả sử f là một hàm xác định trên X với giá trị trong $\overline{\mathbf{R}}$ và có tích phân trên X. Xét hàm tập định nghĩa bởi

$$\lambda : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$$

$$A \longmapsto \lambda(A) = \int_A f d\mu.$$

Hàm tập λ thường được gọi là *tích phân bất định* của f. Từ tính cộng tính của tích phân (Định lí 2.1), hàm tập λ là cộng tính. Thực ra λ còn là σ-cộng tính. Ta có định lí sau:

3.2.1. Định lí. *Hàm tập* λ *(định nghĩa như trên) là* σ*-cộng tính, nghĩa là nếu* $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{A}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$, $n \neq m$ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *thì*

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu. \tag{3.7}$$

Hơn nữa, f ***khả tích trên*** A ***khi và chỉ khi*** $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| d\mu < +\infty$.

MATH-EDUCARE

3.2.2. Hệ quả. *Giả sử f đo được không âm trên X. Khi đó λ là một độ đo trên $\mathcal{A}$. Lúc này λ được gọi là độ đo xác định bởi f và μ.*

Định lí quan trọng sau đây đôi khi cũng được gọi là *định lí về tính liên tục tuyệt đối* của tích phân:

3.2.3. Định lí. (Tính liên tục tuyệt đối của tích phân) *Nếu f khả tích trên A thì với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho*

$$\int_A |f| d\mu < \epsilon$$

với mọi tập đo được $E \subset A$ mà $\mu E < \delta$.

3.3. Quan hệ giữa tích phân Lebesgue và tích phân Riemann.

Dưới đây là định lí cho ta thấy tích phân Lebesgue thật sự là một sự mở rộng của tích phân Riemann. Ta sẽ chỉ phát biểu cho trường hợp $k = 1$.

3.3.1. Định lí. *Mọi hàm $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ khả tích Riemann đều khả tích Lebesgue và hai tích phân đó trùng nhau, nghĩa là*

$$(R)\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f d\mu.$$

Định lí sau đây thuộc về H. Lebesgue, nêu ra đặc trưng của lớp các hàm khả tích Riemann trên một đoạn trong R (quan hệ h.k.n. ở đây được hiểu là theo độ đo Lebesgue).

3.3.2. Định lí. *Một hàm bị chặn $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ là khả tích Riemann khi và chỉ khi nó liên tục hầu khắp nơi trên $[a, b]$.*

Để ý rằng một hàm không bị chặn thì không khả tích Riemann. Tuy nhiên nhiều hàm như thế lại có tích phân Riemann

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

suy rộng. Liệu các hàm như thế có khả tích Lebesgue không? Nói chung là không. Tuy nhiên định lí sau đây cho thấy rằng câu trả lời là khẳng định nếu tích phân Riemann suy rộng của $|f|$ tồn tại.

3.3.3. Định lí. *Giả sử $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a \in \mathbb{R})$ khả tích Riemann trên mọi đoạn con đóng của $[a, +\infty)$. Khi đó f là khả tích Lebesgue trên $[a, +\infty)$ khi và chỉ khi tích phân Riemann suy rộng $\int_a^\infty |f(x)|dx$ tồn tại. Hơn nữa, trong trường hợp này*

$$\int_{[a,\infty)} f d\mu = \int_a^\infty f(x)dx.$$

3.3.4. Nhận xét. Sự tồn tại của tích phân Riemann suy rộng $\int_a^\infty f(x)dx$ không đảm bảo tính khả tích (Lebesgue) của hàm f. Một ví dụ kinh điển minh hoạ điều này là hàm $f(x) = (\sin x)/x$ với $f(0) = 1$ trên $[0, \infty)$. Trong giải tích cổ điển ta đã biết tích phân Riemann suy rộng của f tồn tại và $\int_0^\infty (\sin x)/x dx = \pi/2$ nhưng $\int_0^\infty (|\sin x|/x)dx$ không tồn tại và f cũng không khả tích Lebesgue trên $[0, \infty)$ (xin độc giả hãy kiểm tra).

Đối với tích phân Riemann suy rộng với cận hữu hạn (f không bị chặn) ta cũng có kết quả tương tự như Định lí 3.3.3, được phát biểu trong Định lí 3.3.5 sau đây:

3.3.5. Định lí. *Giả sử $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ không bị chặn, khả tích Riemann trên mọi đoạn $[a + \epsilon, b] \subset [a, b]$ $(\epsilon > 0)$. Khi đó f khả tích Lebesgue trên $[a, b]$ khi và chỉ khi tích phân Riemann suy rộng $\int_a^b |f(x)|dx := \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^b |f(x)|dx$ tồn tại.*

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

§4. TÍCH CÁC ĐỘ ĐO VÀ ĐỊNH LÍ FUBINI.

Mục này nêu lên mối quan hệ giữa tích phân trên không gian tích với các tích phân trên các không gian thành phần.

4.1. Tích các độ đo.

Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ và (Y, Σ, ν) là hai không gian với độ đo đủ, σ-hữu hạn. Ở đây $\mathcal{A}$ và Σ là những σ-đại số. Ta kí hiệu

$$\mathcal{R} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \Sigma\}.$$

Vì $\mathcal{A}$ và Σ đều là những nửa vành nên theo Bổ đề 4.2.1 Chương 3 tích của chúng là một nửa vành các tập con của tích Descartes $X \times Y$.

Xét hàm tập $\pi : \mathcal{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ xác định bởi

$$\pi(A \times B) := \mu A \times \nu B, \quad \text{mọi } A \times B \in \mathcal{R} \tag{4.1}$$

(để ý quy ước $0.\infty = 0$). Chúng ta có kết quả sau:

4.1.1. Bổ đề. *Hàm tập π là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$. Hơn nữa, π là σ-hữu hạn.*

Bây giờ áp dụng quá trình thác triển tiêu chuẩn độ đo ở Chương 3 cho độ đo π trên $\mathcal{R}$ ta sẽ nhận được một độ đo trên một σ-đại số bao hàm $\mathcal{R}$. Ta đi đến định nghĩa:

4.1.2. Định nghĩa. Độ đo thác triển tiêu chuẩn của độ đo π trên nửa vành $\mathcal{R}$ lên σ-đại số $\mathcal{L}$ các tập π^*-đo được trên $X \times Y$ gọi là *độ đo tích* của hai độ đo μ và ν (theo thứ tự ấy) và được kí hiệu là $\mu \otimes \nu$. Lúc này $\mathcal{L}$ được kí hiệu là $\mathcal{A} \otimes \Sigma$ và một tập $E \in \mathcal{A} \otimes \Sigma$ đôi khi cũng được gọi là $\mu \otimes \nu$-đo được. Không gian $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \Sigma, \mu \otimes \nu)$ được gọi là *không gian độ đo tích* của hai không gian độ đo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ và (Y, Σ, ν).

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

Nhận xét 4.1.3.

(i) Chú ý rằng $\mathcal{A} \otimes \Sigma$ chứa σ-đại số sinh bởi $\mathcal{R}$ là $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ và $\mu \otimes \nu$ luôn là độ đo đủ.

(ii) Ta hãy xét trường hợp đặc biệt khi X, Y là các không gian $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^p$ với các độ đo Lebesgue μ^n, μ^p tương ứng. Lúc này $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ có thể coi là $\mathbf{R}^{n+p}$. Tích của các độ đo μ^n và μ^p là $\mu^n \otimes \mu^p$, chính là độ đo Lebesgue μ^{n+p} trên $\mathbf{R}^{n+p}$.

4.2. Biểu diễn độ đo một tập trong không gian tích qua tích phân các thiết diện của nó.

Bây giờ chúng ta sẽ nêu lên mối quan hệ giữa các tập $\mu \otimes \nu$ - đo được trong $X \times Y$ với các tập con đo được trong X và Y. Kết quả chủ yếu được phát biểu trong Định lí 4.2.1 và nó là bước quan trọng trong việc thiết lập Định lí Fubini ở mục sau. Trước tiên ta nêu ra một vài khái niệm cần thiết.

Giả sử $A \subset X \times Y$, $x \in X$ và $y \in Y$. Ta định nghĩa *thiết diện của A tại x* (kí hiệu A_x) và *thiết diện của A tại y* (kí hiệu là A^y) tương ứng là các tập sau:

$$A_x := \{y \in Y \mid (x,y) \in A\};\ A^y := \{x \in X \mid (x,y) \in A\}.$$

Rõ ràng rằng $A_x \subset Y$ với mọi $x \in X$, $A^y \subset X$ với mọi $y \in Y$ và các thiết diện của A có thể là $\emptyset$. Ta nêu ra một số đẳng thức liên quan tới những thiết diện của các tập:

(a) $(\bigcup\limits_{i\in I} A_i)_x = \bigcup\limits_{i\in I}(A_i)_x$ và $(\bigcup\limits_{i\in I} A_i)^y = \bigcup\limits_{i\in I}(A_i)^y$;

(b) $(\bigcap\limits_{i\in I} A_i)_x = \bigcap\limits_{i\in I}(A_i)_x$ và $(\bigcap\limits_{i\in I} A_i)^y = \bigcap\limits_{i\in I}(A_i)^y$;

(c) $(A \setminus B)_x = A_x \setminus B_x$ và $(A \setminus B)^y = A^y \setminus B^y$.

4.2.1. Định lí. *Giả sử $E \in \mathcal{A} \otimes \Sigma$. Khi đó $E_x \in \Sigma$ μ-h.k.n trên X và hàm $x \longmapsto \nu(E_x)$* là đo được trên X, thỏa mãn*

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu. \tag{4.3}$$

*Hàm này xác định μ-h.k.n. trên X.

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

Tương tự như vậy, $E^y \in \mathcal{A}$ ν-h.k.n. trên Y và hàm $y \longmapsto \mu(E^y)$ là đo được trên Y, thỏa mãn

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_Y \mu(E^y) d\nu.$$

4.2.3. Nhận xét. Định lí 4.2.1 khái quát một kết quả quen biết của tích phân Riemann trên $\mathbf{R}^n$, chẳng hạn, diện tích một miền G trong $\mathbf{R}^2$ bằng tích phân (trên $\mathbf{R}$) các lát cắt G_x của nó.

Đặc biệt nếu $f \geq 0$ thì $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích của hình thang cong giới hạn bởi các đường $x = a$, $x = b$, trục hoành và đồ thị hàm $y = f(x)$. Kết quả này thể hiện ý nghĩa hình học của tích phân Riemann. Đối với tích phân Lebesgue ta cũng có kết quả tương tự.

4.3. Ý nghĩa hình học của tích phân Lebesgue.

Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian với độ đo μ đầy đủ và σ-hữu hạn, $M \in \mathcal{A}$ và f là hàm không âm, khả tích trên M. *Đồ thị dưới* của hàm f là tập

$$Q := \{(x, y) \in X \times \mathbf{R} \mid x \in M,\ 0 \leq y \leq f(x)\}*.$$

Bây giờ ta lấy $Y = \mathbf{R}$, $\Sigma = \mathcal{L}$ là σ-đại số các tập đo được Lebesgue trên $\mathbf{R}$ và ν là độ đo Lebesgue trên $\mathbf{R}$. Khi đó $Q \subset X \times \mathbf{R}$. Ý nghĩa hình học của tích phân Lebesgue được thể hiện rõ trong định lí sau đây:

---

*Nếu với $x \in M$ mà $f(x) = +\infty$ ta quy ước hiểu thiết diện Q_x tại x là $[0, +\infty)$ thay cho $[0, +\infty]$. Như vậy có thể coi $Q \subset X \times \mathbb{R}$. Vả lại, với giả thiết f khả tích trên M tập các điểm x như thế có độ đo bằng không.

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

4.3.1. Định lí. *Đồ thị dưới Q của f là tập $\mu \times \nu$-đo được, nghĩa là $Q \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$. Ngoài ra,*

$$\mu \otimes \nu(Q) = \int_M f d\mu. \tag{4.4}$$

4.4. Định lí Fubini.

Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ và (Y, Σ, ν) là hai không gian với các độ đo đủ, σ-hữu hạn và $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \Sigma, \mu \otimes \nu)$ là không gian tích của chúng. Giả sử $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là hàm $\mathcal{A} \otimes \Sigma$-đo được**. Kết quả cơ bản nhất của Mục §4 này là:

4.4.1. Định lí. (Fubini) *Giả sử $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ là hàm $\mathcal{A} \otimes \Sigma$-đo được. Khi đó nếu $f \geq 0$ hay f khả tích trên $X \times Y$ thì các tích phân lặp sau tồn tại*

$$\int_X [\int_Y f d\nu] d\mu, \quad \int_Y [\int_X f d\mu] d\nu$$

và ta có đẳng thức

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X [\int_Y f d\nu] d\mu = \int_Y [\int_X f d\mu] d\nu. \tag{4.5}$$

Hơn nữa, khi f khả tích trên $X \times Y$ thì với hầu hết các $y \in Y$, hàm $X \ni x \longmapsto f(x, y)$ khả tích trên X và với hầu hết các $x \in X$, hàm $Y \ni y \longmapsto f(x, y)$ khả tích trên Y.

4.4.2. Nhận xét.

(i) Định lí Fubini cho phép ta, dưới các điều kiện đã phát biểu, đưa việc tính một tích phân bội trên không gian tích về việc tính các tích phân lặp trên các không gian thành phần hoặc đổi thứ tự lấy tích phân trong các tích phân lặp.

**Nếu f xác định trên một tập $A \in \mathcal{A} \otimes \Sigma$ thì ta đặt $f(x, y) := 0$ khi $(x, y) \notin A$).

WWW.MATHEDUCARE.COM

(ii) Để có thể áp dụng Định lí Fubini cho một hàm không thỏa điều kiện $f \geq 0$, trước hết ta phải khẳng định tính khả tích của hàm này trên không gian tích và đây là một vấn đề khó.

Sự tồn tại các tích phân lặp (cho dù là hữu hạn) nói chung không đủ để kéo theo tính khả tích của f. Để minh họa chúng ta hãy xét trường hợp $X = Y = [0,1]$, $\mu = \nu$ là độ đo Lebesgue còn hàm f xác định bởi $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$ nếu $(x,y) \neq (0,0)$ và $f(0,0) = 0$. Dễ dàng thấy rằng

$$\int_0^1 \Big[\int_0^1 f(x,y)dx\Big]dy = -\frac{\pi}{4} \text{ và } \int_0^1 \Big[\int_0^1 f(x,y)dy\Big]dx = \frac{\pi}{4}.$$

Định lí Fubini chứng tỏ f không khả tích trên $[0,1] \times [0,1]$.

Tuy nhiên ta có định lí sau, rất thuận tiện trong áp dụng.

4.4.3. Định lí. (Tonelli) *Cho $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm $\mathcal{A} \otimes \Sigma$-đo được. Nếu một trong hai tích phân lặp*

$$\int_X \Big[\int_Y |f|d\nu\Big]d\mu \quad \textit{hay} \quad \int_Y \Big[\int_X |f|d\mu\Big]d\nu$$

hữu hạn thì f khả tích trên $X \times Y$ và đẳng thức sau nghiệm đúng.

$$\int_{X\times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \Big[\int_Y f d\nu\Big]d\mu = \int_Y \Big[\int_X f d\mu\Big]d\nu.$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

B. Bài tập

§1. Định nghĩa tích phân.

1.1. Cho A là một tập đo được và $(B_n)_n$ là một dãy các tập con đo được của A thoả mãn điều kiện

$$B_n \subset B_{n+1},\ n \in \mathbf{N} \text{ và } \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A.$$

Chứng minh rằng nếu $g \in \mathcal{S}_A^+$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} g d\mu = \int_A g d\mu.$$

1.2. Cho $(f_n)_n \subset \mathcal{S}_A^+$, $g \in \mathcal{S}_A^+$ với $f_n \leq f_{n+1}, n \in \mathbf{N}$ và $g \leq \lim_n f_n$. Chứng tỏ rằng

$$\int_A g d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu.$$

1.3. Cho A là tập đo được và $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là một hàm đo được không âm. Chứng tỏ rằng

$$\int_A f d\mu = \sup\Big\{ \int_A \phi d\mu \mid \phi \text{ là đơn giản không âm và } \phi \leq f \Big\}. \quad (*)$$

§2. Các tính chất cơ bản của tích phân.

2.1. Cho $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là hàm đo được, không âm. Chứng tỏ rằng nếu $B \subset A$ và B đo được thì

$$\int_B f d\mu \leq \int_A f d\mu.$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

2.2. Gọi $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbf{N})$ là σ -đại số tất cả các tập con của $\mathbf{N}$. Với mỗi $A \in \mathcal{A}$ ta đặt

$$\mu A = \begin{cases} n & \text{nếu } A \text{ có n phần tử,} \\ +\infty & \text{nếu A vô hạn.} \end{cases}$$

(a) Chứng tỏ rằng μ là một độ đo trên $\mathcal{A}$ và μ là σ-hữu hạn.

(b) Giả sử $A \in \mathcal{A}$, A hữu hạn $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$ và $f(x) \neq -\infty$ mọi $x \in A$. Chứng tỏ f là đo được trên A và tích phân $\int_A f d\mu$ tồn tại. Tìm điều kiện cần và đủ để f khả tích trên A.

2.3. Cho A là một tập đo được và $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ là các hàm khả tích trên A theo độ đo μ. Ta đặt

$$B_n = \{x \in A \mid |f(x)| \geq n\}.$$

$$A_n = \{x \in A \mid n \leq |f(x)| < n+1\},\ n \in \mathbf{N}.$$

Chứng minh rằng:

(a) $\mu B_n < +\infty$, mọi $n \in \mathbf{N}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \mu B_n = 0$ và

(c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu A_k = 0.$

2.4. Cho X là một tập không rỗng, $a \in X$ và δ_a là độ đo Dirac tại a trên $\mathcal{P}(X)$. Giả sử $A \subset X$ và $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ là một hàm tùy ý. Hãy tính $\int_A f d\mu$ và tìm điều kiện cần và đủ để f khả tích trên A.

2.5. Cho A là một tập đo được và $f_n, f : A \longrightarrow \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, là các hàm đo được. Hãy chứng tỏ rằng nếu $\int_A |f_n - f|^3 d\mu \to 0$ thì $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A, $n \to \infty$.

2.6. Giả sử f là hàm đo được trên A. Chứng tỏ rằng nếu có hai hàm g, h khả tích trên A sao cho $g \leq f \leq h$ h.k.n. thì f khả tích trên A.

MATH-EDUCARE

2.7. (a) Giả sử f khả tích trên A đối với độ đo μ và $f(x) > 0$ h.k.n. trên A. Chứng tỏ rằng nếu $\int_A f d\mu = 0$ thì $\mu A = 0$.

(b) Giả sử f là hàm đo được trên E và $\int_e f d\mu = 0$ với mọi tập đo được $e \subset E$. Chứng minh rằng $f = 0$ h.k.n. trên E.

2.8. Giả sử f là hàm khả tích trên A. Chứng tỏ rằng khi đó tập $\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$ có thể biểu diễn thành hợp của một họ đếm được các tập có độ đo hữu hạn và rời nhau từng đôi.

§3. Qua giới hạn dưới dấu tích phân.

3.1. Cho $(f_n)_n$ là một dãy các hàm khả tích trên A sao cho $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ mọi $n \in \mathbf{N}$. Chứng tỏ rằng $f_n \to 0$ h.k.n. trên A khi và chỉ khi $\int_A f_n d\mu \to 0$ $(n \to \infty)$.

3.2. Giả sử $(f_n)_n$ là một dãy đơn điệu tăng các hàm khả tích trên A và

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \int_A f_n d\mu < +\infty.$$

Khi đó hầu khắp nơi trên A tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_n f_n(x) = f(x)$, f khả tích trên A và

$$\lim_{n \to \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

3.3. Xét hàm $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ xác định bởi $f(x) = 0$ nếu $x \notin (0, 1]$ và $f(x) = \sqrt{n}$ nếu $x \in A_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ với một $n \in \mathbf{N}$ nào đó. Mỗi $n \in \mathbf{N}$, gọi $f_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \chi_{A_k}$.

(a) Chứng minh rằng $f_n \nearrow f$ trên $\mathbf{R}$.

(b) Chứng tỏ rằng f khả tích trên $\mathbf{R}$ và tính $\int_{\mathbf{R}} f d\mu$ (μ là độ đo Lebesgue).

(c) Chứng tỏ rằng f^2 không khả tích trên $\mathbf{R}$.

WWW.MATHEDUCARE.COM

3.4. Cho A là một tập đo được và $(B_n)_n$ là một dãy các tập con đo được của A thoả mãn điều kiện

$$B_n \subset B_{n+1},\ n \in \mathbf{N} \text{ và } \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A.$$

Chứng minh rằng nếu $f \geq 0$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f d\mu = \int_A f d\mu.$$

3.5. Cho A là một tập đo được và $g, f: A \longrightarrow \mathbf{R}$ là các hàm khả tích trên A. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$ ta đặt

$$A_n = \{x \in A \mid n \leq |f(x)| < n+1\} \text{ và}$$
$$B_n = \{x \in A \mid |f(x)| \geq n\}.$$

Chứng minh rằng:

(a) $\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{A_n} g d\mu = 0$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n\mu A_n < +\infty$ và

(c) $\lim_{n\to\infty} n\mu B_n = 0$.

3.6. Chứng minh rằng nếu $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là một dãy hàm đo được trên A và $\sum_{n=1}^{\infty} \int_A |f_n| d\mu < +\infty$ thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A (\sum_{n=1}^{\infty} f_n) d\mu.$$

3.7. Cho $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), \mu)$ là không gian độ đo như ở Bài 2.2.

(a) Giả sử $x : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$ là một dãy các số thực. Chứng tỏ rằng x là hàm đo được. Chứng tỏ rằng x khả tích trên $\mathbf{N}$

MATH-EDUCARE

khi và chỉ khi $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|$ hội tụ và trong trường hợp này ta có $\int_{\mathbf{N}} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$.

(b) Giả sử với mỗi $n \in \mathbf{N}$, $f_n : \mathbf{N} \longrightarrow [0, +\infty)$ là một dãy số. Ta kí hiệu $f_n(k) = a_{nk}$, $k \in \mathbf{N}$. Hãy tính $\int_{\mathbf{N}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu$. Từ đó suy ra rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}.$$

3.8. Cho $f \geq 0$ trên A. Đặt

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } f(x) \leq n, \\ n, & \text{nếu } f(x) > n. \end{cases}$$

Chứng minh

$$\lim_n \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

3.9. Cho f là một hàm đo được, dương và hữu hạn h.k.n. trên A. Với mỗi $i \in \mathbf{Z}$, gọi

$$\eta_i = \mu(\{x \in A \mid 2^{i-1} < f(x) \leq 2^i\}).$$

Chứng tỏ rằng f khả tích trên A khi và chỉ khi $\sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^i \eta_i < \infty$.

3.10. Cho $(E_k)_{k\in\mathbf{N}}$ là một dãy các tập con đo được của một tập X và thoả mãn $\sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k < +\infty$. Gọi A là tập gồm tất cả những $x \in X$ sao cho x thuộc vào vô hạn những tập E_k của họ nói trên. Đặt $g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(x)$, $x \in X$. Chứng tỏ rằng

WWW.MATHEDUCARE.COM

(a) g là hàm đo được và khả tích trên X,
(b) $\mu A = 0$.

3.11. Giả sử $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ với $A_n \cap A_m = \emptyset$ nếu $n \neq m$ và A_n là đo được với mọi $n \in \mathbf{N}$. Giả sử thêm rằng $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ khả tích trên mỗi A_n. Chứng tỏ rằng f khả tích trên A khi và chỉ khi $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| d\mu < +\infty$. Trong trường hợp này ta có

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

3.12. Cho $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), \mu)$ là không gian độ đo như ở Bài 2.2. Giả sử $f_n : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$, $n \in N$ xác định bởi

$$f_n(k) := \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{nếu } 1 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{nếu } k > n. \end{cases}$$

(a) Chứng tỏ rằng dãy $(f_n)_n$ hội tụ đều trên N.
(b) Tìm $\lim_n \int_{\mathbf{N}} f_n d\mu$.

3.13. Cho $A = (0, 1)$. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$ ta đặt

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{nếu } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{nếu } \frac{1}{n} \leq x < 1. \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng $f_n \to 0$ (khi $n \to \infty$) và tìm $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$.

3.14. Giả sử $\mu A < +\infty$ và $f_n, f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$, $n \in \mathbf{N}$ là các hàm đo được, hữu hạn hầu khắp nơi trên A. Chứng tỏ rằng

$$\int_A \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

khi và chỉ khi $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A.

MATH-EDUCARE

§4. Tích các độ đo và Định lí Fubini.

4.1. Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ và (S, Σ, ν) là hai không gian độ đo với các độ đo σ-hữu hạn. Giả sử $E, F \in \mathcal{A} \otimes \Sigma$ sao cho $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ μ-h.k.n. trên X. Chứng tỏ rằng

$$\mu \otimes \nu(E) = \mu \otimes \nu(F).$$

4.2. Giả sử $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow [0, +\infty]$. Sử dụng Định lí Fubini để chứng tỏ rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(n, m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(n, m).$$

4.3. Giả sử $g : X \to \mathbf{R}$ là hàm μ-khả tích và $h : Y \to \mathbf{R}$ là hàm ν-khả tích. Ta định nghĩa $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ bởi $f(x, y) = g(x)h(y)$, với mọi $x \in X$, $y \in Y$. Chứng tỏ rằng f là $\mu \otimes \nu$-khả tích và ta có

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \left(\int_X g d\mu\right) \cdot \left(\int_Y h d\nu\right).$$

4.4. Chứng tỏ rằng nếu $f(x, y) = ye^{-(1+x^2)y^2}$ với mọi $x, y \in [0, \infty)$ thì

$$\int_{[0,\infty)} \left[\int_{[0,\infty)} f d\mu(x) \right] d\mu(y) = \int_{[0,\infty)} \left[\int_{[0,\infty)} f d\mu(y) \right] d\mu(x).$$

Từ đây hãy suy ra rằng

$$\int_{[0,\infty)} e^{-x^2} d\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

C. Bài tập ôn

O1. Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo sao cho tồn tại một hàm f khả tích trên X và $f(x) > 0$ với mọi $x \in X$. Chứng tỏ rằng μ là độ đo σ-hữu hạn.

O2. Giả sử μ là một độ đo σ-hữu hạn trên $\mathcal{A}$.

(a) Chứng tỏ rằng tồn tại một họ $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{A}$ thỏa mãn các điều kiện

$$A_n \cap A_m = \emptyset \text{ nếu } m \neq n,\ \mu A_n < +\infty, n \in \mathbf{N}, X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

(b) Giả sử $(A_n)_n$ là họ tập như ở câu (a). Với $x \in X$ ta đặt

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A_n \text{ mà } \mu A_n = 0, \\ \frac{1}{n^2 \mu A_n} & \text{nếu } x \in A_n \text{ mà } \mu A_n > 0. \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng f khả tích trên X.

(c) Đặt $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $n \in \mathbf{N}$. Hãy chứng tỏ rằng

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f d\mu = \int_X f d\mu.$$

O3. Giả sử $(f_n)_n$ là một dãy các hàm đo được, bị chặn trên A và $\mu A < \infty$. Chứng minh rằng nếu f_n hội tụ đều về f trên A thì

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

Hãy chỉ ra một ví dụ chứng tỏ rằng khẳng định trên không còn đúng nữa nếu $\mu A = \infty$.

O4. Cho f là hàm đo được và không âm trên tập hợp A. Chứng minh rằng

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

$$\int_A f d\mu = \sup \sum_{n=1}^{\infty} (\inf_{x \in A_n} f(x)) \mu(A_n),$$

trong đó, *sup* được lấy trên họ tất cả các dãy tập hợp $(A_n)_n$ đo được, đôi một rời nhau và $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

O5. Cho I là một gian trong $\mathbf{R}$ và $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ khả tích Lebesgue. Giả sử $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Đặt $J = \{(x-b)/a \mid x \in I\}$. Chứng tỏ rằng hàm $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$ xác định bởi $g(x) = f(ax+b)$, $x \in J$ là khả tích và ta có

$$\int_I f d\mu = |a| \int_J g d\mu.$$

[Hướng dẫn. Trước hết hãy chứng minh cho trường hợp f là hàm đơn giản không âm và để ý đến Bài tập 4.7 Chương 2.]

O6. Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo với $\mu(X) < \infty$. Gọi $\mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu)$ là họ tất cả các hàm đo được, hữu hạn h.k.n. trên X. Trong $\mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ta xem hai hàm tương đương chỉ là một. Với $f, g \in \mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ta đặt

$$d(f, g) = \int_X \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} d\mu.$$

(a) Chứng tỏ d là một mêtric trên $\mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu)$.

(b) $f, f_n \in \mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $n \in \mathbf{N}$. Khi đó $d(f_n, f) \to 0$ khi và chỉ khi $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A.

(c) Chứng minh rằng $(\mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu), d)$ là một không gian mêtric đầy đủ.

O7. Giả sử μ là độ đo đủ, f_n, f là các hàm khả tích trên A thỏa mãn $\int_E |f_n - f| d\mu \to 0$. Chứng tỏ rằng $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Hãy chỉ ra một ví dụ chứng tỏ điều ngược lại không đúng.

O8. Giả sử $(f_k)_k$ là một dãy các hàm đo được trên A. Chứng tỏ rằng nếu

$$\int_E |f_k - f_j| d\mu \to 0 \text{ khi } k, j \to \infty$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

thì tồn tại một dãy con $(f_{k_i})_i$ của $(f_k)_k$ sao cho $(f_{k_i})_i$ hội tụ h.k.n. trên A về một hàm có giá trị hữu hạn và đo được trên A.

[Hướng dẫn. Chứng tỏ rằng

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{k,i\to\infty} \mu\{x \in A \mid |f_k(x) - f_i(x)| \geq \epsilon\} = 0,$$

sau đó áp dụng Bài O17 Chương 2].

O9. Cho E là một tập đo được và gọi $L^1(E,\mu)$ là tập hợp gồm tất cả các hàm khả tích trên E. Trên $L^1(E,\mu)$ các hàm tương đương được đồng nhất với nhau. Với $f, g \in L^1(E,\mu)$, ta đặt

$$d(f,g) = \int_E |f-g| d\mu.$$

Chứng tỏ rằng

(a) $(L^1(E,\mu), d)$ là một không gian mêtric,

(b) $f_n \longrightarrow f$ trong $(L^1(E,\mu), d)$ thì $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên E,

(c) $(L^1(E,\mu), d)$ là một không gian mêtric đủ.

O10. Tính các tích phân Lebesgue trên $(0, +\infty)$ của các hàm số sau:

$$f(x) = e^{-x}; \quad g(x) = \frac{1}{2^{[x]}}$$

trong đó $[x]$ chỉ phần nguyên của x.

O11. Cho $(E_n)_n$ là một dãy những tập đo được thỏa mãn $E_{n+1} \subset E_n$, mọi $n \in \mathbf{N}$ và f là một hàm khả tích trên E_1. Chứng tỏ rằng

$$\int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

O12. Cho $(f_n)_n$ là một dãy hàm đo được, hội tụ theo độ đo (Lebesgue) đến hàm f trên $[0,1]$. Ngoài ra, $|f_n| \leq M$, mọi $x \in [0,1]$, mọi $n \in \mathbf{N}$ (M là một số dương nào đó). Giả sử $g : [-M, M] \longrightarrow \mathbf{R}$ liên tục.

(a) Chứng minh rằng $g \circ f_n$ là (L)-đo được trên $[0,1]$, mọi $n \in \mathbf{N}$ và

$$g \circ f_n \xrightarrow{\mu} g \circ f \text{ trên } [0,1].$$

(b) Chứng tỏ

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} g \circ f_n d\mu = \int_{[0,1]} g \circ f d\mu.$$

O13. Giả sử f là hàm khả tích trên E với $0 < \mu E < +\infty$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in E$. Chứng minh rằng nếu $0 < \alpha < \mu E$ thì

$$\inf\{\int_e f d\mu \mid e \subset E, \mu e \geq \alpha\} > 0.$$

Khẳng định trên còn đúng không nếu $\mu E = +\infty$?

O14. Giả sử $f \in C_{[0,1]}$, $f(0) = 0$ và f khả vi tại 0. Chứng minh rằng hàm $g(x) = \frac{f(x)}{x\sqrt{x}}$ khả tích Lebesgue trên $[0,1]$.

O15. Cho $(f_n)_n$ là một dãy các hàm không âm, khả tích trên A và $f_n \to 0$ h.k.n. trên A. Giả sử rằng tồn tại một số thực $M > 0$ sao cho $\int_A \max\{f_1, f_2, \cdots, f_n\} d\mu \leq M$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Chứng tỏ rằng $\int_A f_n d\mu \to 0$ khi $n \to \infty$.

O16. Cho f là một hàm khả tích trên X và $\int_E f d\mu \leq \alpha$ với mọi tập đo được $E \subset X$ mà $\mu E < +\infty$ (α là một số thực nào đó). Chứng minh rằng $\int_X f d\mu \leq \alpha$. Kết luận còn đúng không nếu bỏ đi giả thiết f khả tích trên X?

O17. Cho $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ sao cho cả f và f^2 đều khả tích trên X. Chứng tỏ rằng

MATH-EDUCARE

(a) Nếu $1 \leq p \leq 2$ thì $|f|^p$ khả tích trên X,

(b) $\lim_{p \to 1^+} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \int_X |f| d\mu$.

[Hướng dẫn. (a) Đặt $g = \max\{|f|, f^2\}$. Chứng minh $|f|^p \leq g$.

(b) Xét $(p_n)_n \subset [1,2]$, $p_n \to 1$ và xét hàm $\varphi(p) = \int_X |f|^p d\mu$. Chứng minh $\varphi(p_n) \to \varphi(1)$].

O18. Cho f là một hàm khả tích trên X và có tính chất $\int_X f^n d\mu = \int_X f d\mu$, mọi $n \in \mathbf{N}$. Chứng minh rằng tồn tại một tập đo được $E \subset X$ sao cho $f = \chi_E$ h.k.n. trên X.

[Hướng dẫn. Trước hết chứng minh cho trường hợp $f \geq 0$. Đặt

$$E = \{x \in X \mid f(x) = 1\},\ E_\alpha = \{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\},\ \alpha > 1.$$

Chứng minh $\mu E_\alpha = 0$ rồi suy ra $f \leq 1$ h.k.n. trên X. Chứng minh $\int_X f(1-f) d\mu = 0$].

O19. Giả sử $r : \mathbf{N} \to (0,1] \cap \mathbf{Q}$, $r \mapsto r(n) = r_n$ là một song ánh. Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{|x - r_n|}} \text{ hội tụ h.k.n. trên } [0,1].$$

O20. Cho $(X, \mathcal{M}, \mu)$ là một không gian độ đo, T là một không gian mêtric và hàm f: $X \times T \to \mathbf{R}$. Giả sử rằng với mỗi $t \in T$, $f(.,t)$ là một hàm đo được trên X và với mỗi $x \in X$, $f(x,.)$ là hàm liên tục trên T. Giả sử thêm rằng tồn tại hàm khả tích g trên X sao cho với mỗi $t \in T$, $|f(x,t)| \leq g(x)$ h.k.n. Chứng minh rằng hàm F: $T \to \mathbf{R}$ cho bởi

$$F(t) = \int_X f(x,t) d\mu,\ t \in T$$

là liên tục trên T.

WWW.MATHEDUCARE.COM

O21. Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo đủ ($\mathcal{A}$ là một σ-đại số) và $f : X \times (a, b) \to \mathbf{R}$ là một hàm số thỏa mãn các tính chất sau:

(i) Với mỗi $t \in (a, b)$, hàm $f(., t)$ khả tích trên X,

(ii) Tồn tại $t_0 \in (a, b)$ sao cho đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$ tồn tại với hầu hết các $x \in X$,

(iii) Tồn tại một hàm g khả tích trên X và một lân cận V của t_0 sao cho

$$|\frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0}| \leq g(x)$$

mới mọi $t \in V \setminus \{t_0\}$ và hầu hết các $x \in X$.

Chứng minh rằng:

(a) Hàm số $\frac{\partial f}{\partial t}(., t_0)$ xác định và khả tích trên X.

(b) Hàm số $F : (a, b) \to \mathbf{R}$ định nghĩa bởi

$$F(t) = \int_X f(x, t) d\mu$$

khả vi tại t_0 và

$$F'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu.$$

O22. Cho hàm số f khả vi trên đoạn $[a, b]$ và f' bị chặn ở trên $[a, b]$. Chứng minh rằng f' khả tích Lebesgue và

$$(L) \int_{[a,b]} f' d\mu = f(b) - f(a).$$

O23. Gọi $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \chi_{[n-1,n]}$. Chứng minh rằng với mọi số thực $b > 0$, f khả tích Riemann trên $[0, b]$ và tồn tại tích phân suy rộng

$$\lim_{b \to \infty} (R) \int_0^b f dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

tuy nhiên, f không khả tích Lebesgue trên $[0,\infty)$.

O24. Cho hàm số f: $[0,\infty) \to \mathbf{R}$ xác định bởi $f(x) = 0$ khi $\sin x \leq 0$ và

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} \text{ khi } \sin x > 0.$$

Tính $(L)\int\limits_{[0,\infty)} f(x)dx$.

O25. Cho f: $[0,\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ là một hàm liên tục mà $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \delta \in \mathbf{R}$. Chứng minh rằng với mỗi $a > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,a]} f(nx)d\mu(x) = a\delta.$$

O26. (Định lí Arzela) Cho (f_n) là một dãy các hàm khả tích Riemann trên $[a,b]$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx = f(x)$ với mọi $x \in [a,b]$ và f khả tích Riemann trên $[a,b]$. Giả sử rằng tồn tại hằng số M sao cho $|f_n(x)| \leq M$ với mọi $x \in [a,b]$ và mọi $n \in \mathbf{N}$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

O27. Cho dãy hàm số f_n: $[0,1] \to \mathbf{R}$ xác định bởi $f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x}$, $n = 1,2,....$ Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}.$$

O28. Cho μ^* là một độ đo ngoài trên tập X. Gọi $\mathcal{L}$ là σ–đại số các tập μ^*-đo được và $\mu = \mu^*_{|\mathcal{L}}$. Giả sử f là một

hàm không âm khả tích trên X đối với độ đo μ. Xét hàm tập ν: $\mathcal{L} \to \mathbf{R}$ cho bởi $\nu(A) = \int_A f d\mu$ với mỗi $A \in \mathcal{L}$. Khi đó $(X, \mathcal{L}, \nu)$ là một không gian độ đo.

(a) Gọi $\mathcal{M}$ là σ-đại số các tập ν^*-đo được của X. Chứng minh rằng $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$. Hãy cho một ví dụ mà ở đó $\mathcal{L} \neq \mathcal{M}$.

(b) Chứng minh rằng nếu $\mu(\{x \in X : f(x) = 0\}) = 0$ thì $\mathcal{L} = \mathcal{M}$.

(c) Chứng minh rằng nếu g là một hàm khả tích trên X đối với ν thì gf khả tích trên X đối với μ và $\int_A g d\nu = \int_A gf d\mu$ với mọi $A \in \mathcal{L}$.

Chú ý. Do đẳng thức cuối này mà người ta thường viết $d\nu = f d\mu$ và gọi f là đạo hàm của ν đối với độ đo μ và kí hiệu $f = d\nu/d\mu$.

O29. Cho $f_1, f_2, \ldots$ là những hàm khả tích trên A đối với độ đo μ. Giả sử $|f_n| \leq g$ h.k.n. trên A, g khả tích trên A và $f_n \to f$ h.k.n. trên A hay theo độ đo. Chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n - f| d\mu = 0$.

O30. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \text{sign}(\sin(\ln x)), & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

khả tích Riemann trên $[0, 1]$ và tính $(R)\int_0^1 f(x)dx$.

Nhắc lại rằng sign $(y) = 1$ nếu $y > 0$; sign $(y) = -1$ nếu $y < 0$ và sign $(y) = 0$ nếu $y = 0$.

O31. Cho f_n: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cho bởi $f_n = n \cdot \chi_{(0, \frac{1}{n}]}$, $n \in \mathbf{N}$.

(a) Chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$ nhưng $(L)\int_{\mathbf{R}} f_n(x)dx = 1 \neq 0$ với mọi $n \in \mathbf{N}$.

(b) Đặt $u_n = f_n - f_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$. Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f_1(x)$$

và chuỗi này hội tụ tuyệt đối với mỗi $x \in \mathbf{R}$ nhưng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} u_n d\mu = 0 \neq 1 = \int_{[0,1]} f_1 d\mu.$$

O32. Chứng tỏ rằng với mọi $r > 0$ ta đều có

$$\int_{[0,\infty)} \Big[\int_{[0,r]} e^{-xy^2} \sin x d\mu(x) \Big] d\mu(y)$$

$$= \int_{[0,r]} \Big[\int_{[0,\infty)} e^{-xy^2} \sin x d\mu(y) \Big] d\mu(x).$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

D. Bài giải, hướng dẫn

1.1. Giả sử $g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$. Khi đó

$$\int_{B_n} g d\mu = \int_A g\chi_{B_n} d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_(A_i \cap B_n) \; i = 1, 2, ..., n.$$

Đẳng thức trên cùng với

$$\mu A_i = \lim_n \mu(A_i \cap B_n), \forall i,$$

cho ta điều phải chứng minh □

1.2. Hướng dẫn. (xem thêm phép chứng minh Mệnh đề 1.2) Giả sử $g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$. Lấy tùy ý $c \in (0, 1)$ và đặt

$$B_n := \{x \in A \mid f_n(x) \geq cg(x)\}, \; n \in \mathbf{N}.$$

Rõ ràng là $B_n \uparrow A$ và với mỗi $i = 1, 2, ..., n$, $(A_i \cap B_n) \uparrow A_i$. Do đó $\mu A_i = \lim_{n\to\infty} \mu(A_i \cap B_n)$. Từ bất đẳng thức

$$cg\chi_{B_n} \leq f_n, \; x \in A$$

ta được

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} c \int_A g\chi_{B_n} d\mu$$

$$= c \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap B_n) = c \int_A g d\mu.$$

Cho $c \to 1$ ta có kết quả cần chứng minh.

MATH-EDUCARE

1.3.

Gọi α là giá trị của vế phải của (*) (hữu hạn hay $+\infty$). Rõ ràng rằng theo định nghĩa của tích phân thì $\int_A f d\mu \leq \alpha$.

Để chứng minh bất đẳng thức ngược lại, giả sử $(f_n)_n$ là một dãy các hàm đơn giản không âm trên A và $f_n \nearrow f$, $n \longrightarrow \infty$. Ta xét hai trường hợp.

(i) Trường hợp $\alpha < +\infty$. Khi đó theo định nghĩa của supremum, với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại một hàm ϕ là đơn giản không âm trên A sao cho $\phi \leq f$ và $\alpha - \epsilon < \int_A \phi d\mu$. Vì $\phi \leq f = \lim_{n\to\infty} f_n$ nên theo Bài tập 1.2 ta có

$$\alpha - \epsilon < \int_A \phi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu. \qquad (**)$$

Bất đẳng thức (**) đúng với mọi $\epsilon > 0$ nên ta được $\alpha \leq \int_A f d\mu$.

(ii) Trường hợp $\alpha = \infty$. Lúc này, với mọi $N > 0$, tồn tại hàm ϕ đơn giản không âm sao cho $\phi \leq f$ và $N < \int_A \phi d\mu$. Vì $\phi \leq f = \lim_{n\to\infty} f_n$ nên bằng lập luận tương tự như trên (sử dụng Bài tập 1.2) ta được

$$N \leq \int_A \phi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu, \text{ mọi } N > 0.$$

Vậy $\int_A f d\mu = +\infty = \alpha$ □

2.1. Độc giả tự giải.

2.2. Độc giả tự giải.

2.3. Hướng dẫn. Chú ý là $\mu(B_n) \leq \frac{1}{n} \int_A |f| d\mu, n \in \mathbf{N}$.

2.4. Hướng dẫn. Chú ý rằng $f = f(a).\chi_{\{a\}}$ h.k.n.

2.5. Hướng dẫn.

$$\{x \in A \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} = \{x \in A \mid |f_n(x) - f(x)|^3 \geq \epsilon^3\}.$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

2.6. Hướng dẫn. $|f| \leq |g| + |h|$.

2.7.

(a) Đặt $A_1 = \{x \in A \mid f(x) > 0\}$ và $A_2 = \{x \in A \mid f(x) \leq 0\}$. Thế thì A_1 và A_2 là những tập con rời nhau và đo được của A. Theo giả thiết, $\mu(A_2) = 0$. Vì $f > 0$ trên A_1 và $\int\limits_{A_1} f d\mu = \int\limits_{A} f d\mu = 0$ nên ta có $f = 0$ h.k.n. trên A_1, nghĩa là $\mu(A_1) = 0$. Vậy $\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = 0$.

(b) Đặt $E_1 = \{x \in E \mid f(x) > 0\}$ và $E_2 = \{x \in E \mid f(x) < 0\}$. Từ giả thiết ta có

$$\int\limits_{E_1} f d\mu = 0 \text{ và } \int\limits_{E_2} f d\mu = 0.$$

Theo (a) thì $\mu(E_1) = 0$. Tương tự, thay f bởi $-f$ ta cũng có $\mu(E_2) = 0$. Vì $\{x \in E \mid f(x) \neq 0\} = E_1 \cup E_2$ nên $f = 0$ h.k.n. trên E □

2.8.

Đặt $A_0 = \{x \in A \mid |f(x)| > 1\}$ và

$$A_n = \left\{x \in A \mid \frac{1}{n+1} < |f(x)| \leq \frac{1}{n}\right\},\ n \in \mathbf{N}.$$

Khi đó,

$$\int\limits_A |f| d\mu \geq \int\limits_{A_n} |f| d\mu \geq \int\limits_{A_n} \frac{1}{n+1} d\mu = \frac{1}{n+1} \mu(A_n)$$

nên $\mu(A_n) \leq (n+1) \int\limits_A |f| d\mu < +\infty$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Tương tự,

$$\mu A_0 = \int_{A_0} d\mu \leq \int_{A_0} |f| d\mu \leq \int_A |f| d\mu < +\infty.$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

Cuối cùng, dễ thấy rằng

$$\{x \in A \mid f(x) \neq 0\} = A_0 \cup \left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n\right),$$

là điều phải chứng minh □

3.1. Hướng dẫn. Điều kiện cần được suy ra từ định lí hội tụ bị chặn của Lebesgue.

Giả sử $\int_A f_n d\mu \to 0$ và $f_n \searrow f$. Khi đó rõ ràng rằng $f \geq 0$. Từ điều kiện $\int_A f d\mu = 0$ và $f \geq 0$ ta suy ra $f = 0$ h.k.n. trên A.

3.2. Độc giả tự giải.

3.3. Độc giả tự giải.

3.4. Hướng dẫn. Đặt $f_n = f\chi_{B_n}$, $n \in \mathbf{N}$. Lúc này $0 \leq f_n \nearrow f$ khi $n \to \infty$.

3.5.

(a) Để ý rằng f khả tích trên A và nếu $x \in A_n$ thì $n \leq |f(x)| < n+1$. Do đó

$$0 \leq n\mu A_n \leq \int_{A_n} |f| d\mu \leq \int_A |f| d\mu < +\infty.$$

Từ đây, $0 \leq \mu A_n \leq \frac{1}{n} \int_A |f| d\mu < +\infty$ và ta được $\mu A_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Lấy tùy ý $\epsilon > 0$. Vì g khả tích trên A nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\left| \int_e g d\mu \right| < \epsilon \qquad (*)$$

với mọi tập đo được $e \subset A$ mà $\mu e < \delta$.

Theo trên $\mu A_n \to 0$ khi $n \to \infty$ nên có $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho với mọi $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ thì $\mu A_n < \delta$. Từ đây và (*), khi $n \geq n_0$ thì

$$\left| \int_{A_n} g d\mu \right| < \epsilon.$$

MATH-EDUCARE

Điều này có nghĩa là $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} g d\mu = 0$.

(b) Rõ ràng rằng $B_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ và $A_n \cap A_m = \emptyset$ khi $n \neq m$. Do đó theo cách xác định các tập A_n và tính $\sigma-$cọng tính của tích phân ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mu A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} n d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| d\mu$$
$$= \int_{B_1} |f| d\mu \leq \int_{A} |f| d\mu < +\infty.$$

(c) Hướng dẫn. Tiến hành tương tự như (a), với B_n thay cho A_n □

3.6. Hướng dẫn. Áp dụng Hệ qủa 3.1.4 cho dãy $(|f_n|)_n$ để có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A} |f_n| d\mu = \int_{A} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu.$$

Từ đây suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ tuyệt đối h.k.n. trên A. Để ý $|\sum_{i=1}^{n} f_n| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f_n|$ với mọi $n \in \mathbf{N}$ rồi áp dụng định lí hội tụ bị chặn Lebesgue.

3.7. Hướng dẫn. Chứng minh tương tự (hoặc áp dụng Bài 3.6).

3.8. Hướng dẫn. Để ý $0 \leq f_n \nearrow f$ trên A.

3.9. Gọi $E_i = \{x \in A \mid 2^{i-1} < f(x) \leq 2^i\}$, $i \in \mathbf{Z}$ và $\phi_n = \sum_{i=-n}^{n} 2^i \chi_{E_i}$, $n \in \mathbf{N}$. Khi đó tồn tại một hàm đo được g trên A sao cho $\phi_n \nearrow g$ h.k.n. trên A khi $n \to \infty$. Rõ ràng rằng $0 \leq f \leq g$ hầu khắp A.

WWW.MATHEDUCARE.COM

Giả sử f khả tích trên A. Khi đó vì $\phi_n \leq 2f$ và để ý rằng với mỗi $n \in \mathbf{N}$, ϕ_n là hàm đơn giản, ta được

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^i \eta_i = \lim_{n\to\infty} \int_A \phi_n d\mu \leq 2 \int_A f d\mu < +\infty.$$

Trái lại, giả sử $\sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^i \eta_i < +\infty$. Khi đó, mỗi n, ϕ_n là khả tích và g cũng vậy. Vì $0 \leq f \leq g$ nên f cũng khả tích □

3.10. Hướng dẫn.

(a) Để ý rằng $\int_X g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n$..

(b) Kết luận được suy ra từ đẳng thức

$$A = \{x \in X \mid g(x) = +\infty\}$$

và g khả tích trên X.

3.11. Hướng dẫn. Áp dụng tính σ-cộng tính của tích phân cho hàm $|f|$.

3.12.

(a) Đặt $f(k) = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbf{N}$. Lấy tùy ý $\epsilon > 0$. Khi đó tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Nếu $n \geq n_0$ thì

$$|f_n(k) - f(k)| = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{nếu } k > n. \\ 0 & \text{nếu } 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

và do đó $|f_n(k) - f(k)| < \epsilon$ với mọi $n \geq n_0$ và với mọi $k \in \mathbf{N}$. Vậy $(f_n)_n$ hội tụ đều về f trên $\mathbf{N}$.

(b) Ta có

$$\int_{\mathbf{N}} f_n d\mu = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \mu(\{k\}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \longrightarrow +\infty \text{ khi } n \to \infty \quad \square$$

3.13. Độc giả tự giải.

3.14.

Để ý rằng hàm $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$, $t \geq 0$ là đơn điệu tăng ngặt. Do đó nếu $s, \ell > 0$ thì

$$s \geq \ell \text{ khi và chỉ khi } \frac{s}{1+s} \geq \frac{\ell}{1+\ell}.$$

• Giả sử (*) thỏa mãn. Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý và đặt $A_n = \{x \in A \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$. Khi đó,

$$\mu A_n = \mu\left(\left\{x \in A \mid \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} \geq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\right\}\right).$$

Ngoài ra,

$$\begin{aligned} 0 \leq = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\mu A_n &= \int_{A_n} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} d\mu \\ &\leq \int_{A_n} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu \leq \int_A \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

khi $n \longrightarrow \infty$. Như vậy $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A.

• Giả sử $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A. Với kí hiệu như trên, ta có

$$\left\{x \in A \mid \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} \geq \epsilon\right\} \subset A_n.$$

Do đó $\frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \xrightarrow{\mu} 0$ trên A. Vì $\frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \leq 1$ và $\mu A < +\infty$ nên định lí hội tụ bị chặn Lebesgue cho ta

$$\int_A \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu \longrightarrow 0 \quad \square$$

MATH-EDUCARE

4.1. Hướng dẫn. Áp dụng Định lí 4.2.1.

4.2. Độc giả tự giải.

4.3. Độc giả tự giải.

4.4. Hướng dẫn. Để ý rằng

$$\int_{[0,\infty)} \Big[\int_{[0,\infty)} y e^{-(1+x^2)y^2} d\mu(y) \Big] d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_{[0,\infty)} \frac{1}{x^2+1} d\mu(x) = \frac{\pi}{4}$$

và

$$\int_{[0,\infty)} \Big[\int_{[0,\infty)} f d\mu(x) \Big] d\mu(y) = \Big(\int_{[0,\infty)} e^{-x^2} dx \Big) . \Big(\int_{[0,\infty)} e^{-y^2} d\mu(y) \Big)$$

$$= \Big(\int_{[0,\infty)} e^{-x^2} dx \Big)^2 .$$

Áp dụng Định lí Tonelli để suy ra điều cần chứng minh.

Bài tập ôn.

O1. Hướng dẫn. Để ý rằng tập

$$B_n = \{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\}$$

có độ đo hữu hạn.

O2.

(a) Độc giả hãy tự giải.

(b) Để ý rằng với mọi $n \in \mathbf{N}$ ta có

$$\int_{A_n} f d\mu = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \mu A_n = 0, \\ \frac{1}{n^2} & \text{nếu } \mu A_n \neq 0. \end{cases}$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

Mặt khác, vì $f > 0$ trên X nên theo tính σ-cộng tính của tích phân ta được

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Vậy f khả tích trên X.

(c) Vì các tập A_i rời nhau từng đôi một nên ta có

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu$$

$$= \int_X f d\mu.$$

Cách 2. Có thể chứng minh theo cách ở Bài 3.4 □

O3.

Từ giả thiết, tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 1, \text{ với mọi } x \in A,\ n \geq n_0.$$

Do đó,

$$|f(x)| \leq 1 + |f_{n_0}(x)| \text{ và}$$

$$|f_n(x)| \leq 2 + |f_{n_0}(x)|, \text{ với mọi } x \in A,\ n \geq n_0.$$

Vì $\mu A < +\infty$ và f_{n_0} bị chặn nên $2 + |f_{n_0}|$ khả tích trên A. Từ đây và định lí hội tụ bị chặn Lebesgue cho ta

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

Khẳng định trên không còn đúng nữa nếu $\mu A = +\infty$. Để làm ví dụ minh họa, chúng ta hãy xét dãy hàm $(f_n)_n$ trên $\mathbf{R}$ với

$$f_n = \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,n]},\ n \in \mathbf{N}.$$

MATH-EDUCARE

Khi đó $(f_n)_n$ hội tụ đều về hàm $f = 0$ trên $\mathbf{R}$ nhưng

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n d\mu = 1 \neq 0 = \int_{\mathbf{R}} f d\mu.$$

Thật vậy, ta có $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$ với mọi $x \in \mathbf{R}$ và mọi $n \in \mathbf{N}$ nên $(f_n)_n$ hội tụ đều về f trên $\mathbf{R}$. Hơn nữa,

$$\int_{\mathbf{R}} f_n d\mu = \frac{1}{n}\mu([0, n]) = 1 \text{ với mọi } n \in \mathbf{N} \quad \square$$

O4. Hướng dẫn. Đặt

$$\alpha = \int_A f d\mu = \sup \sum_{n=1}^{\infty} (\inf_{x\in A_n} f(x))\mu(A_n),$$

trong đó, *sup* được lấy trên họ tất cả các dãy tập hợp $(A_n)_n$ đo được, đôi một rời nhau và $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Khi đó

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu \geq \sum_{n=1}^{\infty} (\inf_{x\in A_n} f(x))\mu(A_n)$$

nên $\int_A f d\mu \geq \alpha$. Để chứng minh bất đẳng thức ngược lại, có thể dùng định lí về cấu trúc hàm đo được không âm.

O5. Hướng dẫn. Trước hết giả sử $f = \chi_A$ với A là một tập đo được nào đó của I. Rõ ràng rằng $\frac{1}{a}(A - b) \subset J$. Lại để ý rằng $\chi_A(ax + b) = \chi_{\frac{1}{a}(A-b)}(x)$. Do đó theo Bài tập 4.7 Chương 2 ta được

$$\int_J g d\mu = \frac{1}{|a|}\mu A = \frac{1}{|a|}\int_I f d\mu.$$

Từ đây suy ra công thức cần chứng minh đúng cho các hàm đặc trưng và do đó cũng đúng cho các hàm đơn giản. Bằng một lập luận quen thuộc ta cũng suy ra được công thức cần chứng minh đúng cho các hàm đo được không âm và các hàm đo được.

WWW.MATHEDUCARE.COM

O6.

(a) Trước hết ta thấy $d(f,g)$ hữu hạn và không âm vì $\mu(X) < \infty$ còn hàm dưới dấu tích phân không âm và nhỏ hơn 1 hầu khắp nơi trên X. Hơn nữa, $d(f,g)$ không phụ thuộc vào việc chọn các hàm f, g trong các lớp tương đương. Giả sử $d(f,g) = 0$. Thế thì

$$\frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} = 0$$

h.k.n. và do đó $f(x) = g(x)$ h.k.n.

Đẳng thức $d(f,g) = d(g,f)$ là hiển nhiên.

Để ý rằng nếu $a, b, c \geq 0, a \leq b + c$ thì

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Do đó với $f, g, h \in (X, \mathcal{M}, \mu)$ ta được

$$\frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} \leq \frac{|f(x) - h(x)|}{1 + |f(x) - h(x)|} + \frac{|h(x) - g(x)|}{1 + |h(x) - g(x)|} \text{ h.k.n.}$$

Từ đây, $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$. Vậy d là một mêtric trên $S(X, \mathcal{M}, \mu)$.

(b) Xem Bài tập 3.14.

(c) Giả sử (f_n) là một dãy Cauchy trong $S(X, \mathcal{M}, \mu)$. Với mỗi số tự nhiên k, tồn tại n_k sao cho $d(f_n, f_{n_k}) < 2^{-k}$ khi $n > n_k$. Ta luôn có thể giả thiết rằng $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ Vì chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X \frac{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|}{1 + |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|} d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} d(f_{n_{k+1}}, f_{n_k})$$

MATH-EDUCARE

hội tụ nên chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x)$ hội tụ hầu khắp nơi với

$$\alpha_k(x) = \frac{|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|}{1 + |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Giả sử chuỗi này hội tụ tại $x \in X$, thế thì $|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq 1$ với k đủ lớn. Do đó

$$|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq 2\alpha_k(x).$$

Vậy chuỗi

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

hội tụ h.k.n. Gọi tổng của chuỗi này là $f(x)$. Khi đó f đo được, hữu hạn h.k.n. và $f_{n_k} \to f$ h.k.n. Do $\mu(X) < \infty$, $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$. Theo Câu (b), $d(f_{n_k}, f) \to 0$. Ta suy ra

$$d(f_k, f) \leq d(f_k, f_{n_k}) + d(f_{n_k}, f) \to 0 \text{ khi } k \to \infty \ \square$$

O7. Độc giả tự giải.

O8. Độc giả tự giải.

O9. Độc giả tự giải.

O10. Hướng dẫn. Để ý rằng f, g đều là các hàm đo được không âm trên $(0, +\infty)$ nên các hàm tập xác định trên σ-đại số các tập đo được Lebesgue trên $(0, \infty)$ bởi các công thức

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu, \ \lambda'(A) = \int_A g d\mu$$

(A là tập đo được của $(0, \infty)$) là các độ đo. Hãy viết

$$(0, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (0, n] \text{ hay } (0, \infty) = (0, 1) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n+1]\right)$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

rồi áp dụng các tính chất của độ đo.

O11. Hướng dẫn. Đặt $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Dễ chứng minh được rằng $\chi_E f = \lim_{n\to\infty} \chi_{E_n} f$ trên E_1. Ngoài ra, do $|\chi_{E_n} f| \leq f$ trên E_1, với mọi $n \in \mathbf{N}$ và f khả tích trên E_1 nên định lí hội tụ bị chặn Lebesgue cho ta điều phải chứng minh.

O12.

(a) • Với mọi $a \in \mathbf{R}$, mọi $n \in \mathbf{N}$,

$$\{x \in [0,1] \mid g \circ f_n(x) > a\} = f_n^{-1}(g^{-1}((a,\infty))).$$

Vì g liên tục nên $g^{-1}((a,\infty))$ là mở trong $[-M,M]$ và do đó $g^{-1}((a,\infty)) = [-M,M] \cap V$ với V là một tập mở nào đó trong $\mathbf{R}$. Từ đây,

$$\{x \in [0,1] \mid g \circ f_n(x) > a\} = f_n^{-1}([-M,M]) \cap f_n^{-1}(V),$$

là tập đo được Lebesgue. Vậy $g \circ f_n$ đo được Lebesgue trên $[0,1]$. Tương tự như vậy ta cũng có $g \circ f$ là hàm đo được trên $[0,1]$.

• Với $\epsilon > 0$ tùy ý, do g liên tục đều trên $[-M,M]$ nên có $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, x' \in [-M,M]$ mà $|x - x'| < \delta$ ta có $|g(x) - g(x')| < \epsilon$. Từ đây,

$$\{x \in [0,1] \mid |g \circ f_n(x) - g \circ f(x)| \geq \epsilon\} \subset \{x \in [0,1] \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\},$$

cùng với giả thiết $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ta suy ra $g \circ f_n \xrightarrow{\mu} g \circ f$ trên $[0,1]$.

(b) Do g liên tục trên $[-M,M]$ nên nó bị chặn trên đoạn này, nghĩa là có $K > 0$ sao cho $|g(x)| \leq K$ với mọi $x \in [-M,M]$. Do đó $|g \circ f_n(x)| \leq K$ với mọi $x \in [0,1]$ và mọi $n \in \mathbf{N}$. Từ đây và Định lí hội tụ bị chặn Lebesgue ta được

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} g \circ f_n d\mu = \int_{[0,1]} g \circ f d\mu \quad \square$$

MATH-EDUCARE

O13. (i) Với mỗi $n \in \mathbf{N}$ ta đặt

$$E_n = \{x \in E \mid f(x) < \frac{1}{n}\}.$$

Khi đó $E_{n+1} \subset E_n$ với mọi $n \in \mathbf{N}$ và

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x \in E \mid f(x) \leq 0\} = \emptyset.$$

Vì $\mu E < \infty$ nên

$$\lim_{n\to\infty} \mu E_n = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = 0.$$

Do vậy tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ để cho $\mu E_{n_0} \leq \frac{\alpha}{2}$. Nếu $e \subset E$, $\mu e \geq \alpha$ thì

$$\mu(e \setminus E_{n_0}) \geq \mu e - \mu E_{n_0} \geq \frac{\alpha}{2} \text{ và}$$

$$\int_e f d\mu \geq \int_{e\setminus E_{n_0}} f d\mu \geq \frac{1}{n_0}\mu(e \setminus E_{n_0}) \geq \frac{\alpha}{n_0}.$$

Vậy

$$\inf\{\int_e \mid e \subset E, \mu e \geq \alpha\} \geq \frac{\alpha}{n_0} > 0.$$

(ii) Khi $\mu E = +\infty$ thì khẳng định trên không còn đúng nữa. Thật vậy, xét độ đo Lebesgue trên $\mathbf{R}$, $E = [0, +\infty)$ và $f = e^{-x}$, $x \in E$. Khi đó f (L)-khả tích trên E, $f(x) > 0$ với mọi $x \in E$ nhưng với mọi $\epsilon > 0$ ta đều có

$$\int_{[a,b]} f\, d\mu = e^{-a} - e^{-b} < e^{-a} < \epsilon \text{ khi } b > a > -ln\epsilon.$$

Nghĩa là

$$\inf\{\int_e f d\mu \mid e \subset, \mu e \geq \alpha\} = 0 \quad \square$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

O14.
Trước hết g đo được Lebesgue trên $[0,1]$.
Vì

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

nên tồn tại $\delta\in(0,1)$ và $K>0$ sao cho $|\frac{f(x)}{x}|\le K$ với mọi $x\in(0,\delta)$. Từ đây, $|g(x)|\le\frac{K}{\sqrt{x}}$ với mọi $x\in[0,\delta)$ và do đó g khả tích trên $[0,\delta)$.

Mặt khác, vì g liên tục trên $[\delta,1]$ nên khả tích Lebesgue trên đoạn này. Vậy g khả tích trên $[0,1]$ □

O15. Độc giả tự giải.

O16.
Với mỗi số tự nhiên n, ta đặt

$$E_n=\{x\in X\mid |f(x)|>\frac{1}{n}\}\text{ và }f_n=f\cdot\chi_{E_n}.$$

Gọi $E=\{x\in X\mid f(x)\neq 0\}$ thì $|f_n|\le|f|$ và $f_n(x)\to f(x)$ với mọi $x\in E$. Do f khả tích trên X nên khả tích trên E và do đó Định lí hội tụ bị chặn Lebesgue cho ta:

$$\int_X f d\mu=\int_E f d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f d\mu\le\alpha.$$

Kết luận sẽ không còn đúng nữa nếu bỏ đi giả thiết f khả tích trên X. Thật vậy, hãy xét ví dụ sau. Lấy $X=\mathbf{R}$, $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\mathbf{R})$ và $\mu E=0$ nếu E hữu hạn còn $\mu E=+\infty$ nếu E vô hạn. Khi đó với $f\equiv 1$ trên $\mathbf{R}$ ta luôn có $\int_E f d\mu=\mu E=0$ với mọi $E\subset\mathbf{R}$, $\mu E<+\infty$. Tuy nhiên $\int_{\mathbb{R}} f d\mu=+\infty$ □

O17.
(a) Đặt $g=\max\{|f|,f^2\}$. Khi đó ta có $g\le|f|+f^2$ nên g khả tích trên X. Do vậy khi $1\le p\le 2$ thì $|f|^p\le g$ và f^p khả tích trên X.

WWW.MATHEDUCARE.COM

(b) Ta xét hàm

$$\varphi(p) = \int_X |f|^p d\mu, \quad p \in [1,2].$$

Giả sử $(p_n)_n \subset [1,2]$ và $p_n \to 1$ khi $n \to \infty$. Gọi $f_n = |f|^{p_n}$, $n \in \mathbf{N}$. Khi đó, $f_n \to |f|$ h.k.n. trên X và $0 \le f_n \le g$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Theo Định lí hội tụ bị chặn Lebesgue, ta được

$$\varphi(p_n) = \int_X |f|^{p_n} d\mu = \int_X f_n d\mu \to \int_X |f| d\mu.$$

Vậy $\varphi(p) \to \varphi(1) = \int_X |f| d\mu$ khi $p \to 1$. Do đó khi $p \to 1$ ta có

$$\frac{1}{p} \ln \varphi(p) \to \ln \varphi(1)$$

và,

$$\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \varphi(p)^{\frac{1}{p}} \to \varphi(1) = \int_X |f| d\mu$$

(lưu ý rằng khi $f = 0$ h.k.n. trên X thì đẳng thức cần chứng minh đúng một cách hiển nhiên) □

O18.

(i) Trước hết xét trường hợp $f \ge 0$. Đặt

$$E = \{x \in X \mid f(x) = 1\}, \; E_\alpha = \{x \in X \mid f(x) \ge \alpha\}, \; \alpha > 1.$$

Ta có, với mỗi $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_X f d\mu = \int_X f^n d\mu \ge \int_{E_\alpha} f^n d\mu \ge \alpha^n \mu E_\alpha$$

hay $\mu E_\alpha \le \alpha^{-n} \int_X f d\mu$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Cho $n \to \infty$ ta được $\mu E_\alpha = 0$. Do đó,

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > 1\}) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{1+\frac{1}{m}}\right) = 0,$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

tức là $f(x) \leq 1$ h.k.n. trên X. Từ đây ta suy ra

$$0 \leq \int_{E^c} f(1-f)d\mu \leq \int_X f(1-f)d\mu = \int_X fd\mu - \int_X f^2 d\mu = 0.$$

Như vậy $f = 0$ h.k.n. trên E^c. Điều này cũng có nghĩa là $f = \chi_E$ h.k.n. trên X.

(ii) Giả sử f là một hàm khả tích bất kì. Đặt $g = f^2$ thì $g \geq 0$ và $\int_X g^n d\mu = \int_X g d\mu$ với mọi $n = 1, 2, 3, \cdots$. Theo chứng minh ở phần (i) ở trên, tồn tại một tập đo được $F \subset X$ sao cho $g = \chi_F$ h.k.n. trên X. Gọi

$$E = \{x \in X \mid f(x) = 1\} \text{ và } G = \{x \in X \mid f(x) = -1\}.$$

Thế thì $E \cap G = \emptyset$ và $F = E \cup G$. Từ các đẳng thức

$$\int_X fd\mu = \int_F fd\mu = \int_E fd\mu - \int_G fd\mu = \mu E - \mu G,$$

$$\int_X fd\mu = \int_X f^2 d\mu = \int_F 1 d\mu = \mu F = \mu E + \mu G$$

ta suy ra $\mu G = 0$. Vậy $f = \chi_E$ h.k.n. trên X □

O19.

Vì mỗi hàm $x \mapsto \frac{1}{n^2\sqrt{|x-r_n|}}$ là đo được Lebesgue và không âm trên $[0,1]$ nên hàm số

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{|x-r_n|}},\ x \in [0,1]$$

cũng đo được và không âm trên $[0,1]$. Ta có

$$\int_{[0,1]} fd\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} \frac{1}{n^2\sqrt{|x-r_n|}} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sqrt{r_n} + \sqrt{1-r_n})}{n^2}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}}{n^2} = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{3} < +\infty$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

(để ý rằng ta đã sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacôp-xki $\sqrt{a} + \sqrt{1-a} \leq \sqrt{2}$). Vậy f khả tích Lebesgue trên $[0,1]$ và do đó, hữu hạn h.k.n. trên $[0,1]$ □

O20. Lấy tùy ý $t \in T$. Giả sử $(t_n)_n \subset T$ và $t_n \to t$ trong T. Xét các hàm f_n: $X \to \mathbf{R}$ cho bởi $f_n(x) = f(x, t_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Từ giả thiết ta có $|f_n(x)| \leq g(x)$ h.k.n. với mọi $n = 1, 2, \ldots$ và

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(x, t_n) = f(x, t), \text{ với mọi } x \in X.$$

Theo Định lí Lebesgue về sự hội tụ bị chặn ta được

$$F(t_n) = \int_X f(x, t_n)d\mu = \int_X f_n d\mu \to \int_X f(x, t)d\mu = F(t).$$

Vậy F liên tục tại t và vì t là điểm tùy ý thuộc T nên F liên tục trên T □

Nhận xét. Nếu ta thay giả thiết " với mỗi $x \in X$, $f(x, .)$ là hàm liên tục trên T" bởi giả thiết

"Tồn tại $t_0 \in T$ và một hàm h trên X sao cho $\lim_{t\to t_0} f(x, t) = h(x)$ với hầu hết các $x \in X$" thì ta có các kết luận sau (xin độc giả hãy kiểm tra)

(i) h là hàm khả tích trên X,

(ii) $\lim_{t\to t_0} \int_X f(x, t)d\mu(x) = \int_X h(x)d\mu(x)$.

O21.

Đặt $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) = 0$ tại mọi điểm x mà đạo hàm riêng này không tồn tại. Khi đó đẳng thức

$$\lim_{t\to t_0} \left|\frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0}\right| = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$$

thỏa mãn h.k.n. trên X. Do vậy theo Bài O20 (chính xác là nhận xét sau Bài O20), $\frac{\partial f}{\partial t}(., t_0)$ là một hàm khả tích trên X

MATH-EDUCARE

và hơn nữa,

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}=\int_X \frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}d\mu(x)$$
$$\longrightarrow \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)d\mu(x)$$

khi $t \to t_0$. Điều này chứng tỏ rằng F khả vi tại t_0 và

$$F'(t_0)=\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)d\mu \quad \square$$

O22.

Theo giả thiết, tồn tại $M > 0$ sao cho $|f'(x)| \le M$ với mọi $x \in [a,b]$. Ta xét hàm $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ xác định bởi

$$F(x)=\begin{cases} f(a)+f'(a)(x-a) & \text{khi } x<a,\\ f(x) & \text{khi } a\le x\le b,\\ f(b)+f'(b)(x-b) & \text{khi } x>b. \end{cases}$$

Khi đó rõ ràng F khả vi trên $\mathbf{R}$ và $|F'(x)| \le M$ với mọi $x \in \mathbf{R}$. Với mỗi số tự nhiên n, đặt

$$f_n(x)=n\Big[F(x+\frac{1}{n})-F(x)\Big]=\frac{F(x+\frac{1}{n})-F(x)}{\frac{1}{n}}, \quad x\in\mathbf{R}.$$

Thế thì f_n liên tục và $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=F'(x)$ với mọi $x \in \mathbf{R}$. Hơn nữa, theo định lí giá trị trung bình Lagrange ta được $|f_n(x)| \le M$ với mọi $x \in \mathbf{R}$ và $n \in \mathbf{N}$. Bây giờ Định lí Lebesgue về sự hội tu bị chặn cho ta

$$(L)\int_{[a,b]} f'd\mu=\lim_{n\to\infty}(L)\int_{[a,b]} f_n d\mu=\lim_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n(x)dx. \qquad (*)$$

WWW.MATHEDUCARE.COM

Mặt khác, dùng phép đổi biến $u = x + \frac{1}{n}$ trong tích phân Riemann sau cùng ta được

$$\begin{aligned}(R)\int_a^b f_n(x)dx &= n\Big[\int_a^b F(x+\frac{1}{n})dx - \int_a^b F(x)dx\Big]\\ &= n\Big[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} F(u)du - \int_a^b F(x)dx\Big]\\ &= n\Big[\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(x)dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)dx\Big]\\ &= \frac{\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(x)dx}{\frac{1}{n}} - \frac{\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)dx}{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Theo định lí về giá trị trung bình trong tích phân Riemann, tồn tại $\xi_n \in [b, b+\frac{1}{n}]$ và $\eta_n \in [a, a+\frac{1}{n}]$ sao cho

$$F(\xi_n) = \frac{\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(x)dx}{\frac{1}{n}} \text{ và } F(\eta_n) = \frac{\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)dx}{\frac{1}{n}},\ n \in \mathbf{N}.$$

Cho $n \to \infty$ ta được

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty}(F(\xi_n) - F(\eta_n))\\ &= F(b) - F(a) = f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Điều này cùng với $(*)$ cho ta đẳng thức cần chứng minh □

O23.

Rõ ràng f bị chặn trên $[0, \infty)$ và tập các điểm gián đoạn của f trên $[0, \infty)$ là $\mathbf{N}$. Vì vậy trên $[0, b]$, f chỉ có hữu hạn

điểm gián đoạn nên khả tích Riemann trên $[0, b]$ với mọi $b > 0$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, gọi $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$ thì

$$|(R)\int_0^b f\,dx - S_{[b]}| \leq \frac{1}{[b]} \text{ với mọi } b > 1.$$

Vậy

$$\lim_{b\to\infty}(R)\int_0^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

là một số hữu hạn. Tuy nhiên $|f| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\chi_{[n-1,n]}$ là hàm không khả tích (L) vì

$$(L)\int_{[0,\infty)} |f|d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,\infty)}\frac{1}{n}\chi_{[n-1,n]}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty \quad \square$$

O24.

Do f liên tục trong các khoảng $(n\pi, (n+1)\pi)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ nên f đo được Lebesgue trên $[0, \infty)$. Hơn nữa, $f \geq 0$ nên tồn tại $(L)\int_{[0,\infty)} f d\mu$. Vì $\sin x > 0$ khi và chỉ khi $x \in (2n\pi, 2n\pi + \pi)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ nên

$$(L)\int_{[0,\infty)} f d\mu = \sum_{n=0}^{\infty}(L)\int_{(2n\pi, 2n\pi+\pi)} f d\mu.$$

Gọi

$$I_n = (L)\int_{(2n\pi, 2n\pi+\pi)} f d\mu = (R)\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)dx,$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$. Bằng phép biến đổi $t = x + 2n\pi$ ta được

$$I_n = e^{-n\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{-\frac{t}{2}} |\sin t - \cos t|}{\sqrt{\sin t}} dt = e^{-n\pi} I_0.$$

Do $\sin x - \cos x \leq 0$ khi $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ và $\sin x - \cos x \geq 0$ khi $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$ nên dùng phương pháp tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\frac{t}{2}} \cos t}{\sqrt{\sin t}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{t}{2}} \sqrt{\sin t}\, dt \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-\frac{t}{2}} \sqrt{\sin t}\, dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{e^{-\frac{t}{2}} \cos t}{\sqrt{\sin t}} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{t}{2}} d(\sqrt{\sin t}) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{t}{2}} \sqrt{\sin t}\, dt \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-\frac{t}{2}} \sqrt{\sin t}\, dt - 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-\frac{t}{2}} d(\sqrt{\sin t}) \\ &= 2e^{-\frac{t}{2}} \sqrt{\sin t}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2e^{-\frac{t}{2}} \sqrt{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 2\sqrt[4]{8} e^{-\frac{\pi}{8}}. \end{aligned}$$

Vậy

$$(L) \int_{[0,\infty)} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} I_n = 2\sqrt[4]{8} e^{-\frac{\pi}{8}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi}$$

$$= \frac{2\sqrt[4]{8} e^{-\frac{\pi}{8}}}{1 - e^{-\pi}} \quad \square$$

O25.

Cố định $a > 0$ và định nghĩa $f_n(x) = f(nx)$, $x \in [0, a]$, $n \in \mathbf{N}$. Theo giả thiết thì $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \delta$ với mọi $x \in (0, a]$. Do $\lim_{x \to \infty} f(x) = \delta$ nên có $M > 0$ sao cho $|f(x)| < |\delta| + 1$ khi $x > M$. Mặt khác, vì f liên tục trên $[0, M]$ nên bị chặn ở trên

đoạn này. Do đó, tồn tại hằng số $K > 0$ sao cho $|f(x)| \leq K$ với mọi $x \geq 0$. Vậy $|f_n(x)| \leq K$ với mọi $x \in [0, a]$ và mọi $n \in \mathbf{N}$. Áp dụng Định lí Lebesgue về sự hội tụ bị chặn ta được

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,a]} f(nx)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,a]} f_n d\mu$$
$$= \int_{[0,a]} \delta d\mu = a\delta.$$

O26. Độc giả tự giải.

O27.

Ta có

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x}dx = \frac{x^n}{1+x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx.$$

Do

$$0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq 1 \text{ với mọi } x \in [0,1]$$

và

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{(1+x)^2} = 0, \text{ mọi } x \in [0,1)$$

nên theo Định lí Lebesgue về sự hội tụ bị chặn ta có

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx = \lim_{n\to\infty} (L) \int_{[0,1)} \frac{x^n}{(1+x)^2}d\mu = 0.$$

Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh □

MATH-EDUCARE

O28.

(a) Do ν xác định trên $\mathcal{L}$ nên ta có $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$.

Để làm ví dụ cho trường hợp $\mathcal{L} \neq \mathcal{M}$ ta hãy xét $\mathbf{R}$ với độ đo Lebesgue μ và $f = \chi_{(1,2)}$. Do

$$\nu([0,1]) = \int_0^1 \chi_{(1,2)} d\mu = 0$$

nên ta suy ra rằng nếu $B \subset [0,1]$ thì

$$\nu^*(B) \leq \nu^*([0,1]) = 0,$$

nghĩa là mọi tập con của $[0,1]$ đều thuộc $\mathcal{M}$. Trong khi đó ta lại biết rằng tồn tại tập con của $[0,1]$ không thuộc $\mathcal{L}$. Vậy $\mathcal{L} \neq \mathcal{M}$.

(b) Nhờ Câu (a), ta chỉ còn phải chứng minh $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$. Trước hết, giả sử $\nu^*(A) = 0$. Theo Bài tập 3.12 Chương 2, tồn tại tập $B \in \mathcal{L}$ sao cho $A \subset B$ và $\nu(B) = \nu^*(A) = 0$. Do $\int_B f d\mu = \nu(B) = 0$ và f không âm nên $f = 0$ μ-h.k.n. trên B. Nghĩa là

$$\mu(\{x \in B \mid f(x) > 0\}) = 0.$$

Mặt khác từ giả thiết $\mu(\{x \in X \mid f(x) = 0\}) = 0$ ta suy ra

$$\mu(\{x \in B \mid f(x) = 0\}) = 0.$$

f không âm nên

$$B = \{x \in B \mid f(x) > 0\} \cup \{x \in B \mid f(x) = 0\}$$

là tập có độ đo 0 (đối với μ). Vì μ là độ đo đủ nên $A \in \mathcal{L}$.

Bây giờ giả sử $C \in \mathcal{M}$. Lại theo Bài tập 3.12 Chương 2, tồn tại $D \in \mathcal{L}$ sao cho $C \subset D$ và $\nu^*(C) = \nu(D)$. Chú ý rằng

WWW.MATHEDUCARE.COM

ν là một độ đo hữu hạn (do f khả tích trên X) và $D \setminus C \in \mathcal{M}$ nên

$$\nu^*(D \setminus C) = \nu^*(D) - \nu^*(C) = 0$$

(vì $\nu^*{}_{|\mathcal{M}}$ là một độ đo). Theo chứng minh ở trên thì $D \setminus C \in \mathcal{L}$ và vì vậy,

$$C = D \setminus (D \setminus C) \in \mathcal{L}.$$

(c) Trước hết ta xét trường hợp g là hàm đặc trưng, $g = \chi_E$ với $E \in \mathcal{L}$. Khi đó

$$\begin{aligned} \int_A g d\nu &= \int_A \chi_E d\nu = \nu(E \cap A) = \int_{E \cap A} f d\mu \\ &= \int_A \chi_E f d\mu = \int_A g f d\mu. \end{aligned}$$

Nếu g là hàm đơn giản thì từ tính tuyến tính của tích phân và chứng minh trên ta suy ra $\int_A g d\nu = \int_A g f d\mu$.

Giả sử $g \geq 0$. Tồn tại một dãy đơn điệu tăng các hàm đơn giản không âm $(g_n)_n$ hội tụ về g. Vì $(g_n f)_n$ là một dãy đơn điệu tăng các hàm không âm hội tụ về gf nên theo định lí Levi về sự hội tụ đơn điệu ta được

$$\int_A g d\nu = \lim_{n \to \infty} \int_A g_n d\nu = \lim_{n \to \infty} \int_A g_n f d\mu = \int_A g f d\mu.$$

Khi g là hàm khả tích bất kì, ta có

$$\int_A g^+ d\nu = \int_A g^+ f d\mu \text{ và } \int_A g^- f d\nu = \int_A g^- f d\mu,$$

là những số hữu hạn. Vậy

$$\begin{aligned} \int_A g d\nu &= \int_A g^+ d\nu - \int_A g^- d\nu = \int_A g^+ f d\nu - \int_A g^- f d\mu \\ &= \int_A (g^+ f - g^- f) d\mu = \int_A g f d\mu \quad \square \end{aligned}$$

O29. Hướng dẫn. Để ý $|f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2g$ với mọi $n \in \mathbf{N}$.

O30.

Ta thấy f là một hàm số bị chặn ở trên $[0,1]$ và các điểm gián đoạn của f thuộc tập hợp

$$\{0\} \cup \{x \in (0,1] |\ \sin(\ln x) = 0\} = \{0\} \cup \{e^{-k\pi} \mid k = 0, 1, ...\}.$$

Đây là tập đếm được nên có độ đo Lebesgue bằng 0. Do đó f khả tích Riemann trên $[0,1]$ và ta có

$$(R)\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_{[0,1]} f d\mu = \sum_{k=0}^{\infty}(L)\int_{(e^{-(k+1)\pi}, e^{-k\pi})} f d\mu.$$

Lưu ý là trên đoạn $[e^{-(k+1)\pi}, e^{-k\pi}]$ thì

$$\text{sign}(\sin(\ln x)) = (-1)^{k+1}$$

nên

$$\begin{aligned}(L)\int_{[0,1]} f d\mu &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(e^{-k\pi} - e^{-(k+1)\pi}\right) \\ &= -1 + \frac{2e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = \frac{1-e^{\pi}}{1+e^{\pi}} \quad \square\end{aligned}$$

O31.

(a) Giả sử $x \le 0$. Khi đó, $f_n(x) = 0$ với mọi $n \in \mathbf{N}$ nên $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Nếu $x > 0$ thì tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $\frac{1}{n_0} < x$. Từ đó $f_n(x) = 0$ với mọi $n \ge n_0$. Vì vậy trong trường hợp này ta cũng có $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Tuy nhiên

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = n\mu((0, \frac{1}{n}]) = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \neq 0,\ n \in \mathbf{N}.$$

(b) Đặt

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) = f_1(x) - f_{n+1}(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ta có $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f_1(x)$, nên $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f_1(x)$ với mọi $x \in \mathbf{R}$. Lập luận ở Câu (a) cho thấy với mỗi $x \in \mathbf{R}$, tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ để $u_n(x) = 0$ khi $n \geq n_0$ nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ tuyệt đối. Vì

$$\int_{[0,1]} u_n d\mu = \int_{[0,1]} f_n d\mu - \int_{[0,1]} f_{n+1} d\mu$$
$$= 1 - 1 = 0, \ n \in \mathbf{N}$$

nên

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} u_n d\mu = 0 \neq 1 = \int_{[0,1]} f_1 d\mu \quad \square$$

O32 . Hướng dẫn. Để ý rằng $|e^{-xy^2} \sin x| \leq e^{-xy^2}$ và

$$\int_{[0,\infty)} \Big[\int_{[0,r]} e^{-xy^2} d\mu(x) \Big] d\mu(y) = \int_0^1 \Big[\int_1^r e^{-xy^2} dx \Big] dy$$
$$+ \int_1^{\infty} \Big[\frac{1}{y^2} \int_0^{ry^2} e^{-t} dt \Big] dy$$
$$\leq r + \int_1^{\infty} \frac{1}{y^2} dy = r + 1.$$

Từ Định lí Tonelli ta suy ra được e^{-xy^2} khả tích trên $[0, r] \times [0, \infty)$. Cũng từ định lí này ta suy ra được điều phải chứng minh.

MATH-EDUCARE

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[B] Michel Bouyssel, *Intégral de Lebesgue: Mesure et intégration*, Cépadués Éditions, Toulous, 1997.

[CF] A. N. Cônmôgôrôp, X. V. Fômin, *Cơ sở lí thuyết hàm và giải tích hàm*, Tập 1, 2, 3 (bản dịch tiếng Việt của Võ Tiếp), NXB Giáo dục, 1971.

[ĐH] Nguyễn Định, Nguyễn Hoàng, *Hàm thực*, NXB Giáo dục, 1999 (đang in).

[F] Gerald B. Folland, *Real analysis - Modern techniques and their applications*, John Wiley and Sons, 1984.

[Ha] Lương Hà, *Giáo trình Độ đo và Tích phân*, Đại học Huế, 1997.

[HS] Edwin Hewitt, Karl Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer - Verlag, Berlin, 1969.

[K] Paul Krée, *Intégration et théorie de la mesure - une approache géométrique*, Ellipes, Paris, 1997.

[L] Nguyễn Xuân Liêm, *Tôpô đại cương - Độ đo và Tích phân*, NXB Giáo dục, 1994.

[M] Paul Malliavin, *Integration and Probability*, Springer - Verlag, Newyork, 1995.

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

[O] Yu S. Otran, *Bài tập lí thuyết hàm số biến số thực* (bản dịch tiếng Việt), NXB Đại học vàTrung học chuyên nghiệp, Hà nội, 1997.

[PT] Nguyễn Viết Phú, Nguyễn Duy Tiến, *Cơ sở lí thuyết xác xuất*, NXB Đại học vàTrung học chuyên nghiệp, Hà nội, 1983.

[T] Hoàng Tụy, *Giải tích hiện đại*, NXB Giáo dục, 1978.

[V] B. Z. Vulikh, *A Brief cours in the theory of funtions of a real variable*, Mir Publish, Moscow, 1976.

* * *

WWW.MATHEDUCARE.COM

MATH-EDUCARE

MỤC LỤC

trang

Lời nói đầu 3

Chương 0: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ.....5

Chương 1: KHÔNG GIAN MÊTRIC.....19

A. Tóm tắt lí thuyết.....19
B. Bài tập.....45
C. Bài tập ôn.....60
D. Bài giải, hướng dẫn.....75

Chương 2: LÍ THUYẾT ĐỘ ĐO.....117

A. Tóm tắt lí thuyết.....117
B. Bài tập.....136
C. Bài tập ôn.....150
D. Bài giải, hướng dẫn.....158

Chương 3: TÍCH PHÂN LEBESGUE.....194

A. Tóm tắt lí thuyết.....194
B. Bài tập.....210
C. Bài tập ôn.....217
D. Bài giải, hướng dẫn.....226

Tài liệu tham khảo.....253

WWW.MATHEDUCARE.COM